

Leçon 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse.

1 Continuité et continuité uniforme

Définition 1. Soient (E, d) et (F, d') des espaces métriques et $f : E \rightarrow F$

— On dit que f est continue en $x \in E$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in E, d(x, y) < \delta \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

— On dit que f est uniformément continue sur une partie $X \subset E$ lorsque :

$$\forall x, y \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, d(x, y) < \delta \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Proposition 2. Toute application uniformément continue sur X est continue en tout points de X .

Remarque 3. La réciproque est généralement fausse. Un contre-exemple est $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ qui est continue mais pas uniformément continue.

Théorème 4. (Heine) Si (E, d) est compact et $f : E \rightarrow F$ continue, alors f est uniformément continue.

2 Suites et séries de fonctions

Définition 5. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f (abrégé CVS) lorsque pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ dans E , on notera $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cvs} f$. Cela signifie :

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f abrégé CVU et noté $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cvu} f$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

Proposition 6. Si $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cvu} f$ alors $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cvs} f$.

Remarque 7. La réciproque est fausse par exemple avec $f_n : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto x^n$ cvs vers la fonction nulle. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x' \in [0, 1[$ tel que $x^n \geq 1/2$ donc pas de cvu sur $[0, 1[$ mais sur $[0, 1/2[$ oui.

Théorème 8. Soit $X \subset F$ partie d'un ev de dimension finie et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions $X \rightarrow E$ CVU vers f . Si toutes les fonctions f_n sont continues en $a \in X$ alors f est continue en a .

Exemple 9. La suite des $f_n(x) = \exp(-nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et valant 1 en 0. Comme les f_n sont continues et f ne l'est pas la convergence n'est pas uniforme.

Théorème 10. (Dini 1) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions de X compact à valeur réelle. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue alors la convergence est uniforme.

Théorème 11. (Dini 2) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions croissantes et continues de $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle dans $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ alors la convergence est uniforme.

Exemple 12. Sur $[-1, 1]$ la suite de $\mathbb{R}[X]$ définie par $P_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n(x)^2)$ vérifie $0 \leq p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq |x|$ et converge uniformément vers $|x|$ par Dini.

Théorème 13. Soit $X \subset F$ partie d'un ev de dimension finie et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions $X \rightarrow E$ CVU vers f . Soit $a \in \bar{X}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la limite $b_n = \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ existe. Si E est complet alors on peut interchanger les limites : $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Théorème 14. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions dérivables qui converge simplement vers f . Si la suite des dérivées $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément, alors f est dérivable et pour tout $x \in I$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

Théorème 15. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. On suppose qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ et que la suite $(f'_n)_n$ converge uniformément vers g sur $[a, b]$. Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$.

Remarque 16. Tous les résultats s'appliquent aux séries de fonctions en considérant la suite des sommes partielles.

3 Théorie de l'intégration

3.1 Limite-intégrale

Théorème 17. (Convergence monotone) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est mesurable et $\int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Théorème 18. (Fatou) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonction mesurables positives alors :

$$0 \leq \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} (f_n) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq +\infty$$

Théorème 19. (Convergence dominée) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions intégrables telles que :

1. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ μ presque partout avec $f \in \mathcal{L}^1$,
2. Il existe $g \in \mathcal{L}^1$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ μ presque partout.

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ c'est à dire $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$.

Exemple 20. Soit $I_n(\alpha) = \int_0^n (1 + \frac{x}{n})^n e^{-\alpha x} dx$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha \leq 1$ alors $I_n(\alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ et sinon $I_n(\alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\alpha-1}$.

Théorème 21. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions mesurables à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$. Si $\sum_{n \geq 0} \int_X |f_n| d\mu < \infty$ alors les fonctions f_n , $\sum_{n \geq 0} |f_n|$ et $\sum_{n \geq 0} f_n$ sont intégrables. De plus $\int_X \sum_{n \geq 0} f_n d\mu = \sum_{n \geq 0} \int_X f_n d\mu$.

Exemple 22. On a $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}$.

3.2 Intégrales à paramètre

Théorème 23. (Continuité) Si f vérifie les conditions suivantes :

1. Pour tout $u \in E$ la fonction $x \mapsto f(u, x)$ est mesurable.
2. Pour presque tout $x \in X$ la fonction $u \mapsto f(u, x)$ est continue en $u_0 \in E$,
3. Il existe $g \in \mathcal{L}^1$ positive telle que pour tout $u \in E$, $|f(u, x)| \leq g(x)$ presque partout.

Alors $F : u \mapsto \int_X f(u, x) d\mu(x)$ est bien définie sur E et est continue en u_0 .

Remarque 24. On peut étendre la condition locale en u_0 sur E tout entier.

Théorème 25. (Dérivabilité) Si $E = I$ intervalle ouvert non vide. Si f vérifie les conditions suivantes :

1. Pour tout $u \in I$, la fonction $f(u, \cdot)$ est intégrable,
2. La dérivée $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)$ existe μ presque partout avec $u_0 \in I$.
3. Il existe g intégrable telle que pour tout $u \in I$, $|\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)| \leq g(x)$ μ presque partout.

Alors $F : u \mapsto \int_X f(u, x) d\mu(x)$ est définie sur I et dérivable en u_0 et sa dérivée est $F'(u_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x) d\mu(x)$.

Remarque 26. On peut généraliser le résultat sur I entier mais aussi avec une fonction $\mathcal{C}^k$ par récurrence.

Définition 27. On définit pour $x > 0$ la fonction Γ d'Euler par $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ et la fonction Beta pour $x, y > 0$ définie comme $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (a-t)^{y-1} dt$.

Proposition 28. La fonction Γ possède les propriétés suivantes :

1. Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Γ est log-convexe donc convexe.
3. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\Gamma(n+1) = n!$.
4. La fonction Beta vérifie $B(x, y) = B(y, x)$ et $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$.
5. $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$

Remarque 29. Utilisation en théorie des nombres, prolongement de Zeta, loi de Gamma ou du Xi2.

Théorème 30. (Holomorphie sous l'intégrale) Soit $f : \Omega \times X \rightarrow \mathbb{C}$, où $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert. Si f vérifie :

1. Pour tout $z \in \Omega$, $x \mapsto f(z, x)$ mesurable.
2. Pour μ presque tout $x \in X$, $z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe sur Ω de dérivée $\frac{\partial f}{\partial z}(\cdot, x)$.
3. Pour tout $K \subset \Omega$ compact, il existe $\varphi \in L^1(X)$ telle que pour tout $z \in K$, pour tout $x \in X$ on ait $|f(z, x)| \leq \varphi(x)$.

Alors $F : u \mapsto \int_X f(u, x) d\mu(x)$ est bien définie et holomorphe sur Ω de dérivée $F' : x \mapsto \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial z}(x, z) dz$.

Exemple 31. La fonction Γ est holomorphe sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$. (Elle peut se prolonger sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.)

3.3 Intégrale-intégrale

Théorème 32. (Fubini-Tonelli) Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ des espaces mesurés de mesures σ -finies et $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors les fonctions $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ sont bien définies et mesurables. On a de plus dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ les égalités :

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

Exemple 33. On peut calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dx dy$ de deux manières différentes.

Théorème 34. (Fubini-Lebesgue) Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ des espaces mesurés de mesures σ -finies et $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$ on a alors :

1. Les fonctions $x \mapsto f(x, \cdot)$ et $y \mapsto f(\cdot, y)$ sont intégrables.
2. Les fonctions $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ sont intégrables et définies presque partout.
3. $\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

Exemple 35. Soient $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x + y \leq 1\}$ et $f : (x, y) \mapsto xy$ alors $\int \int_D xy dx dy = \int_0^1 x \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{24}$.

Exemple 36. On pose sur $[0, 1]^2$ la fonction $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ et $f(0, 0) = 0$. Alors

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = -\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$$

Définition 37. Soit X une variable aléatoire réelle, on appelle fonction caractéristique de X la fonction $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; $t \mapsto \mathbb{E}[e^{itX}]$.

Définition 38. On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X , noté $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ lorsque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cvs} \mathbb{E}[f(X)]$

Théorème 39. Une autre caractérisation de la convergence en loi est pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{cvs} \mathbb{E}[f(X)]$.

Proposition 40. Soient X et Y des variables aléatoires réelles, alors :

1. φ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}$,
2. $P_X = P_Y \iff \varphi_X = \varphi_Y$
3. Si $\varphi_X \in L^1(\mathbb{R})$ alors X admet une densité f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_X(t) dt$

Théorème 41. (Lévy) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles, on a l'équivalence : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \varphi_{X_n} \xrightarrow{cvs} \varphi_X$.

Théorème 42. (Central Limite) Soit $(X_n)_n$ suite de variables aléatoires qui admettent un moment d'ordre 2, $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \operatorname{Var}(X_1)$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ alors $\frac{S_n - mn}{\sqrt{n\sigma}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$

Théorème 43. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'événement :

- Si la somme $\sum P(A_n)$ est finie alors $P(\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 0$, c'est-à-dire presque sûrement, seul un nombre fini d'événements A_n se réalisent.
- Si la somme $\sum P(A_n) = +\infty$ et les A_n sont indépendants alors $P(\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 1$, c'est-à-dire que presque sûrement un nombre infini d'événements se réalisent.

Exemple 44. Si un singe immortel presse aléatoirement les touches d'un clavier d'une machine à écrire chaque seconde, alors il tapera presque sûrement cette leçon une infinité de fois.

TROUVER DES CONTRE-EXEMPLES

DEV 1 : Etude de Gamma 28

DEV 2 : Levy et TCL 39, 41 et 42

Références

- [AMR11] Mohamed EL AMRANI : Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions. ELLIPSES, 2011.
- [HAS18] Nawfal El Hage HASSAN : Topologie générale et espaces normés. Dunod, 2018.
- [HQ20] Claude ZUILY HERVÉ QUEFFELEC : Analyse pour l'agrégation - Agrégation/Master Mathématiques. Dunod, 2020.
- [MB12] Gilles PAGES MARC BRIANE : Théorie de l'intégration. Vuibert, 2012.
- [MON20] Pierre MONTAGNON : 131 développements pour les oraux - Agrégation externe mathématiques. DUNOD, 2020.

RAPPORT DU JURY :

L'intitulé de cette leçon a été volontairement élargi afin de permettre explicitement aux candidats d'aborder des problèmes plus diversités de permutations de symboles, qu'il s'agisse de limites, d'intégrales, de dérivées, d'espérances. Le choix est large ! Les candidats pourront également inclure dans leur leçon des exemples de permutations de quantificateurs, obtenus par des arguments de compacité ou (pour les candidats aguerris) utilisant le théorème de Baire. Dans tous les cas, on évitera de présenter un catalogue désincarné d'énoncés, en privilégiant les exemples et applications significatifs.