

Leçon 234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue intégrables.

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $X = \mathbb{R}^n$ et μ la mesure de Lebesgue, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1 Construction des intégrales de Lebesgue

1.1 Fonctions mesurables positives

Définition 1. Soit $f = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mathbb{1}_{\{f=\alpha\}}$ une fonction étagée positive.

L'intégrale de f par rapport à la mesure μ est définie par $\int_X f d\mu := \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mu(\{f = \alpha\}) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Proposition 2. Soient f, g deux fonctions étagées positives on a :

- $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$;
- $f \leq g \implies \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$;
- Pour tout $\lambda > 0$, $\int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu$

Définition 3. Lorsque f est mesurable positive, on pose $\int_X f d\mu = \sup \{ \int_X \varphi d\mu, \varphi \leq f, \varphi \text{ étagée positive} \}$. Cette intégrale est à valeur dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ car la fonction nulle minore f .

Remarque 4. Les intégrales de fonctions mesurables positives possèdent les mêmes propriétés que les fonctions étagées positives.

Théorème 5. (Convergence monotone) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est mesurable et

$$\int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \in \overline{\mathbb{R}_+}.$$

Corollaire 6. Si $f = g$ μ -pp des fonctions mesurables positives, alors $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.

1.2 Espace $\mathcal{L}^1$

Définition 7. Une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ est dite μ -intégrable lorsque $|f|$ est intégrable ($\int_X |f| d\mu < +\infty$).

On note $\mathcal{L}^1$ l'ensemble des fonctions μ -intégrables de X dans $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathcal{L}^1$, alors on note $\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$ où f^+ et f^- sont respectivement les parties positives et négatives de la fonction f .

Théorème 8. L'espace $\mathcal{L}^1$ est un $\mathbb{K}$ -ev et $f \mapsto \int_X f d\mu$ est une forme linéaire positive. Elle est donc croissante.

Proposition 9. Pour tout $f \in \mathcal{L}^1$, on a $|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$ avec égalité dans $\mathbb{R}$ si et seulement si f est de signe constant μ -pp. Dans le cas complexe c'est si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ tel que $f = \alpha |f|$ μ -pp.

1.3 Théorèmes de convergence

Théorème 10. (Fatou) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonction mesurables positives alors :

$$0 \leq \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} (f_n) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq +\infty$$

Théorème 11. (Convergence dominée) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions intégrables telles que :

1. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ μ presque partout avec $f \in \mathcal{L}^1$,
2. Il existe $g \in \mathcal{L}^1$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ μ presque partout.

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ c'est à dire $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$.

Exemple 12. Soit $I_n(\alpha) = \int_0^n (1 + \frac{x}{n})^n e^{-\alpha x} dx$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha \leq 1$ alors $I_n(\alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ et sinon $I_n(\alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\alpha - 1}$.

Théorème 13. (Fubini-Tonelli) Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ des espaces mesurés de mesures σ -finies et $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors les fonctions $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ sont bien définies et mesurables. On a de plus dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ les égalités :

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

Exemple 14. On peut calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dx dy$ de deux manières différentes.

Théorème 15. (Fubini-Lebesgue) Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ des espaces mesurés de mesures σ -finies et $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$ on a alors :

1. Les fonctions $x \mapsto f(x, \cdot)$ et $y \mapsto f(\cdot, y)$ sont intégrables.
2. Les fonctions $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ sont intégrables et définies presque partout.
3. $\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

Exemple 16. On pose sur $[0, 1]^2$ la fonction $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ et $f(0, 0) = 0$. Alors

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = -\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$$

Soit $f : E \times X \rightarrow \mathbb{K}$ avec (E, d) métrique, on pose $F : u \mapsto \int_X f(u, x) d\mu(x)$.

Théorème 17. (Continuité) Si f vérifie les conditions suivantes :

1. Pour tout $u \in E$ la fonction $x \mapsto f(u, x)$ est mesurable.
2. Pour presque tout $x \in X$ la fonction $u \mapsto f(u, x)$ est continue en $u_0 \in E$,
3. Il existe $g \in \mathcal{L}^1$ positive telle que pour tout $u \in E$, $|f(u, x)| \leq g(x)$ presque partout.

Alors F est bien définie sur E et est continue en u_0 .

Remarque 18. On peut étendre la condition locale en u_0 sur E tout entier.

Théorème 19. (Dérivabilité) Si $E = I$ intervalle ouvert non vide. Si f vérifie les conditions suivantes :

1. Pour tout $u \in I$, la fonction $f(u, \cdot)$ est intégrable,

2. La dérivée $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x)$ existe μ presque partout avec $u_0 \in I$.

3. Il existe g intégrable telle que pour tout $u \in I$, $\left| \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x) \right| \leq g(x)$ μ presque partout.

Alors F est définie sur I et dérivable en u_0 et sa dérivée est $F'(u_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, x) d\mu(x)$.

Remarque 20. On peut généraliser le résultat sur I entier mais aussi avec une fonction $\mathcal{C}^k$ par récurrence.

2 Espaces L^p

Définition 21. Pour $p > 0$ on note $\mathcal{L}^p$ l'ensemble des fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_X |f|^p d\mu < \infty$. On note alors $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$.

Pour $p = \infty$, $\mathcal{L}^\infty$ est l'ensemble des fonctions mesurables de sup essentiel borné et on note $\|\cdot\|_\infty$ ce sup essentiel.

Proposition 22. Pour tout $p > 0$, l'espace $\mathcal{L}^p$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Proposition 23. Si $\mu(X) < \infty$ et $0 < p \leq q$, alors $\mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p$.

Théorème 24. (Hölder) Soient $p, q \geq 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$. Alors $fg \in \mathcal{L}^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Avec égalité si et seulement si il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha |f|^p = \beta |g|^q$.

Remarque 25. C'est aussi vrai pour $p = 1$ et $q = \infty$.

Théorème 26. (Minkowski) Pour $p \in [1, \infty[$, pour tout $f, g \in \mathcal{L}^p$ on a $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Avec égalité quand $p > 1$ si et seulement si $f = 0$ μ -presque partout ou bien il existe $\alpha \geq 0$ tel que $g = \alpha f$. Si $p = 1$ l'égalité à lieu si et seulement si $f \bar{g} \geq 0$.

Définition 27. On pose L^p le quotient de $\mathcal{L}^p$ par $\{v \in \mathcal{L}^p \mid \|v\|_p = 0\}$ pour $p \in [1, \infty]$. En fait c'est la relation d'équivalence $f \sim g \iff f = g \mu$ pp.

Proposition 28. L'espace $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé.

Théorème 29. (Riesz-Fisher) Pour $p \in [1, \infty]$ l'espace $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé complet.

Corollaire 30. L'espace L^2 muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} d\mu$ est un espace de Hilbert.

3 Densité et transformation de Fourier

3.1 Densité

Proposition 31. *L'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans L^p pour $p \in [1, \infty[$.*

Proposition 32. *Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$, pour tout $p \in [1, \infty[$, l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans L^p .*

Définition 33. Deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont convolables lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable. On définit alors le produit de convolution de f par g par : $\forall x \in \mathbb{R}, f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$.

Remarque 34. Le $\mathbb{K}$ espace vectoriel $(L^1(\mathbb{R}), +, \cdot)$ muni de la convolution $*$ est une $\mathbb{K}$ algèbre commutative sans unité.

Définition 35. Une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^1(\mathbb{R}^d)$ est une approximation de l'unité lorsqu'elle vérifie :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n d\lambda_d = 1$,
2. $\sup_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha_n| d\lambda_d < \infty$,
3. Pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > \varepsilon} |\alpha_n| d\lambda_d = 0$.

Exemple 36. — Noyau de Laplace sur $\mathbb{R}$: $\forall t > 0, \alpha_t(x) = \frac{1}{2t} e^{-|x|/t}$,

— Noyau de Cauchy sur $\mathbb{R}$: $\forall t > 0, \alpha_t(x) = \frac{t}{\pi(t^2 + x^2)}$,

— Noyau de Gauss sur $\mathbb{R}^d$: $\forall t > 0, \alpha_t(x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^d} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$.

Théorème 37. *Soit $(\alpha_n)_n$ une approximation de l'unité. Soit $p \in [1, \infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors ; $\forall n \geq 1, f * \alpha_n \in L^p(\mathbb{R})$ et $f * \alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_p} f$.*

Théorème 38. *L'espace $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{C}_K(\mathbb{R}^d)$ et dense dans tous les $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

3.2 Transformée de Fourier

Définition 39. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Lorsqu'elle existe on appelle transformée de Fourier de f la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; $\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\xi t}dt$.

Théorème 40. *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$ la fonction $\hat{f}$ est continue et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.*

Définition 41. On appelle transformation de Fourier l'application $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$; $f \mapsto \hat{f}$.

Corollaire 42. *La transformation de Fourier $\mathcal{F} : (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est une application linéaire continue.*

Exemple 43. Soit $a < b \in \mathbb{R}$ alors, on a $\mathcal{F}(\mathbf{1}_{[a,b]})(0) = b - a$ et pour $\xi \in \mathbb{R}^*$ on a $\mathcal{F}(\mathbf{1}_{[a,b]})(\xi) = \frac{2 \sin(\frac{b-a}{2}\xi)}{\xi} e^{-i(a+b)\xi/2}$.

Proposition 44. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors $\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f(\lambda x))(\xi) = \frac{1}{\lambda} \hat{f}(\frac{\xi}{\lambda})$, $\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi)$ et $\mathcal{F}(e^{iax} f(x))(\xi) = \tau_a \hat{f}(\xi)$*

Exemple 45. Soit $a > 0$ alors $\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\xi^2/4a}$.

Théorème 46. *(Formule de dualité) Pour tout $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ on a $\int_{\mathbb{R}} f(u)\hat{g}(u)du = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(v)g(v)dv$.*

Théorème 47. *La transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est une application injective.*

Exemple 48. L'équation de convolution $f * e^{-2|x|} = e^{-3|x|}$ n'a pas de solution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exemple 49. Il n'existe pas de neutre pour la convolution dans $L^1(\mathbb{R})$.

DEV 1 : Riesz Fisher 29

DEV 2 : Injectivité de la transformée 45,46 et 47

Références

- [AMR08] Mohamed EL AMRANI : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. ELLIPSES, 2008.
- [MB12] Gilles PAGES MARC BRIANE : Théorie de l'intégration. Vuibert, 2012.

RAPPORT DU JURY :

Cette leçon est orientée vers l'étude et l'utilisation des espaces L^1 (voire L^p) associés à la mesure de Lebesgue (supposée construite) sur

$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$, voire à d'autres mesures. Les grands théorèmes de la théorie (permutations limite-intégrale, Fubini, etc.) sont évidemment incontournables et la proposition systématique d'exemples d'application significatifs doit enrichir ce déroulé. Le thème de l'approximation (approximation des fonctions intégrables par des fonctions continues à support compact, utilisation de la convolution) fournit de nombreuses applications, ainsi que celui de l'analyse de Fourier sur le cercle ou la droite réelle.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la transformée de Fourier sur L^2 , la dualité entre L^p ($1 \leq p \leq \infty$), les liens entre intégration et dérivation, les procédés de sommation presque partout des séries de Fourier, l'algèbre de convolution L^1 , l'étude des parties compactes de L^p , etc.