

Leçon 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

On considère dans cette leçon E un espace vectoriel normé.

1 Généralités

Définition 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E . On appelle série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + \dots + u_n$. On note cette série $\sum u_n$ et le terme S_n est appelé somme partielle d'indice n .

On dit que la série converge lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas la somme de la série est la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ noté $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

On appelle reste d'indice n l'élément $R_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$.

Exemple 2. Séries arithmétiques : Les séries $\sum na$ sont toujours divergente dès que $a \neq 0$. Les sommes partielles sont exprimable grâce à la formule $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Séries géométriques : Les séries $\sum q^n$ avec $q \in \mathbb{C}$ convergent si et seulement si $|q| < 1$. Lorsque $q \neq 1$ les sommes partielles sont

$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Lorsque la série converge la somme est

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ et les restes sont $R_n = \frac{q^{n+1}}{1-q}$.

Proposition 3. Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition 4. On ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1.1 Séries à termes positifs

Théorème 5. Une série $\sum u_n$ réelle à terme positif converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles est majorée.

Théorème 6. On considère deux séries réelles $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $0 \leq u_n \leq v_n$. Alors si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Théorème 7. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes positifs.

1. Si $v_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(u_n)$ et si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge.
2. Si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exemple 8. Grâce à la formule de Wallis $(\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \left(\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1} \right)^2 = \pi)$ et les suite $u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$ et $v_n = \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ on peut montrer la formule de Stirling : $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

Remarque 9. Si les séries ne sont pas à termes positifs c'est faux.

Proposition 10. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Corollaire 11. Soient $\sum u_n$ une série à termes positifs.

1. Si la suite $(n^\alpha u_n)$ converge et $\alpha > 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Si la suite $(n^\alpha u_n)_n$ tend vers $+\infty$ et si $\alpha \leq 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Théorème 12. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ alors :

1. Si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge et les restes vérifient $\sum_{k=n}^{\infty} u_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=n}^{\infty} v_k$.

2. Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge et les sommes partielles vérifient $\sum_{k=0}^n u_n \sim \sum_{k=0}^n v_n$ $n \rightarrow \infty$

Proposition 13. (Comparaison série-intégrale) Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux et décroissante à partir d'une certaine abscisse X . Alors la suite $(U_n)_n$ définie par $U_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n) - \int_0^n f(t)dt$ est convergente. En particulier la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^\infty f(t)dt$ ont la même nature.

Exemple 14. En appliquant le résultat à $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$, on a la suite $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ converge vers γ . La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ dont on note la somme partielle H_n admet alors un développement asymptotique de la forme $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Proposition 15. Les séries de la forme $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ appelées séries de Bertrand convergent si et seulement si $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.

Proposition 16. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes strictement positifs telles qu'à partir d'un certain rang on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Alors :

1. Si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge.
2. Si $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n$ diverge.

1.2 Règles de calcul

Proposition 17. (Règle de D'Alembert) Soit $\sum u_n$ série à terme strictement positif telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$. Alors si $\lambda < 1$ alors la série converge. Si $\lambda > 1$ alors la série diverge. Si $\lambda = 1^+$ (tend vers 1 en restant supérieur) alors la série diverge.

Proposition 18. (Règle de Cauchy) Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \lambda \in [0, \infty]$. Alors si $\lambda < 1$ alors la série converge. Si $\lambda > 1$ alors la série diverge. Si $\lambda = 1^+$ (tend vers 1 en restant supérieur) alors la série diverge.

Remarque 19. Si une $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \lambda$ alors $(u_n)^{\frac{1}{n}} \rightarrow \lambda$. Cependant la réciproque est fausse ($u_n = 2 + (-1)^n$).

Théorème 20. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes positifs, décroissante, tendant vers 0. Alors la série alternée $\sum (-1)^n u_n$ converge et les restes $R_n = \sum_{k=n+1}^\infty (-1)^k u_k$ vérifie $|R_n| < a_{n+1}$.

Théorème 21. (Règle d'Abel) Soit une série $\sum u_n$ avec $u_n = v_n \alpha_n$ où $(\alpha_n)_n$ est positive décroissante tendant vers 0 il existe $M > 0$ tel que pour tout $m \geq n \in \mathbb{N}$ on ait $|b_n + \dots + b_m| \leq M$, alors la série $\sum u_n$ converge et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|R_n| \leq M a_{n+1}$.

Théorème 22. (Produit de Cauchy) Soient $\sum a_p$ et $\sum b_q$ des séries absolument convergentes à valeur dans une algèbre normée complète.

Alors la série $\sum c_n$ où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ est appelé produit de Cauchy de $\sum a_p$ et $\sum b_q$, est absolument convergente et on a $\sum_{n=0}^\infty c_n =$

$$\left(\sum_{p=0}^\infty a_p \right) \left(\sum_{q=0}^\infty b_q \right)$$

Exemple 23. On considère les séries $\sum u_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ et $\sum b_n = \sum \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$ qui convergent. La série produit a pour terme général $w_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} \ln(n-k+2)}$ qui est divergente.

1.3 Approximation des sommes [AMR11]

L'objectif ici est de calculer des valeurs simples à calculer de sommes partielles ou de restes et de s'en servir pour approcher la somme.

Exemple 24. Un moyen de trouver une valeur approchée de la somme de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ (qui vaut $\ln(2)$) est par exemple de regarder $S_8 = \frac{1879}{2520}$ qui fournit une approximation par excès et donc on a $0,745 < S_8 < 0,746$.

Exemple 25. Un moyen de trouver une valeur approchée de la somme de la série $\sum n^{-n}$ est par exemple de regarder $S_4 = \frac{8923}{6912}$ qui fournit une approximation par défaut proche à 35×10^{-5} près.

Exemple 26. Un moyen de trouver une valeur approchée de la somme de la série $\sum \frac{1}{n!}$ est par exemple de regarder $S_{10} = \frac{9864101}{3628800} \cong 2,7182818$ qui fournit une approximation de e proche à 35×10^{-8} près.

2 Séries de Fourier

Définition 27. Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on appelle n -ième coefficient de Fourier de f , le nombre complexe défini par $c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-inx) dx$.

Définition 28. Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on appelle série de Fourier de f , la série $S(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n(t) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n(f)e_n(t) + c_{-n}(f)e_{-n}(t))$

Théorème 29. (Hadamard) Soit $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ on pose $f = u + iv$ et pour $r \in \mathbb{R}_+$ la valeur $A(r) = \sup_{|z|=r} \operatorname{Re}(f(z))$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|a_n| \leq 2 \frac{A(r) - u(0)}{r^n}$ et si $A(r) = O(r^d)$ alors $f \in \mathbb{C}_d[X]$.

Lemme 30. Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de type exponentiel sans zéros telle que $f(0) = 1$ alors il existe $a \in \mathbb{C}$ telle que $f(s) = \exp(az)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Théorème 31. (Parseval) Si $f \in L_{2\pi}^2$ alors :

1. $(S_N(f))_N$ converge vers f en moyenne quadratique : $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$.

C'est à dire que dans $L_{2\pi}^2$ $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n$.

2. On a la formule de Parseval : $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$.

Corollaire 32. Si f est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$ avec $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$ alors :

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx$$

Avec égalité si et seulement si $f(x) = ae^{ix} + be^{-ix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Théorème 33. (Dirichlet faible) Soit f est 2π périodique, qui est $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est la régularisée $\tilde{f}$ de f . C'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$ où $f(x^+)$ (resp $f(x^-)$) est la limite à droite (resp à gauche) de f en x .

Théorème 34. (Dirichlet) Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f .

Exemple 35. (Fresnel) Les fonctions $t \mapsto \cos(t^2)$ et $t \mapsto \sin(t^2)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} \sin(t^2)dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_{\mathbb{R}} \cos(t^2)dt$.

3 Probabilités [APP24]

Définition 36. L'espérance d'une variable aléatoire discrète X telle que $X(\Omega) = \{x_k; k \in K\}$ et $p_k := P(X = x_k)$ est la quantité $\mathbb{E}[X] := \sum_{k \in K} x_k p_k$. On dit que X est intégrable ou admet une espérance lorsque la famille $(p_k x_k)_k$ est sommable.

Dans le cas où $K = \mathbb{N}$, X admet une espérance lorsque la série $\sum p_k |x_k|$ converge.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit le moment d'ordre n d'une va discrète X prenant les valeurs $\{x_k; k \in K\}$, comme l'espérance, lorsqu'elle existe de X^n : $m_n(X) = \mathbb{E}[X^n] = \sum_{k \in K} x_k^n p_k$.

Théorème 37. Soit X va discrète admettant un moment d'ordre $n \geq 2$, alors X admet des moments d'ordre $1, 2, \dots, n$.

Définition 38. On dit qu'une variable aléatoire discrète X discrète admet une variance ou est de carré intégrable lorsqu'elle admet un moment d'ordre 2, sa variance est alors $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \geq 0$.

Si X admet une variance alors son écart-type est $\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Remarque 39. En annexe il y a un tableau des espérance et variances des lois classiques.

Définition 40. Soit X variable aléatoire à valeur entière positive. La fonction génératrice de X est la série entière définie par : $\forall s \in \mathbb{C}, |s| \leq 1, G_X(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(X = k) s^k = \mathbb{E}[s^X]$

Proposition 41. Soit X va discrète à valeur dans $\mathbb{N}$, de fonction génératrice G .

1. G est définie sur $[-1, 1]$ au moins, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ au moins.
2. $G(1) = 1$ et $G(t) \in [0, 1]$ pour $t \in [0, 1]$.
3. G est absolument monotone sur $[0, 1]$: toutes ses dérivées successives sont positives.

Théorème 42. On peut récupérer les probabilités p_n à partir des dérivées successives de G en 0 : $p_n = P(X = n) = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$. Ainsi la fonction génératrice caractérise la loi de X , deux variables aléatoires de même fonction génératrice ont la même loi.

Théorème 43. Si X et Y indépendantes à valeur entière positives alors $G_{X+Y}(s) = G_X(s) + G_Y(s)$. Plus généralement si $X_1, \dots, X_n$

sont des variables aléatoires indépendantes alors $G_{X_1+\dots+X_n}(s) = G_{X_1}(s) \dots G_{X_n}(s)$.

Exemple 44. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

Théorème 45. Soient X et Y variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$ telles que $Z = X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors X et Y suivent chacun une loi de Poisson.

Théorème 46. (TCL) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires iid et L^2 . On note $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$ alors on a que la suite $\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$.

Application 47. (Stirling) Grâce au TCL appliqué à une suite $(X_n)_n$ de va iid suivant $\mathcal{P}(1)$, $\overline{X_n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ et $Z_n = \sqrt{n}(\overline{X_n} - 1)$ on peut retrouver la formule de Stirling : $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

4 Annexe

Nom	Désignation	$\mathbf{P}\{X = k\}$	$\mathbf{E}(X)$	$\mathbf{V}(X)$
Loi uniforme	$\mathcal{U}([1; n])$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Loi uniforme	$\mathcal{U}([a; b])$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)(b-a+2)}{12}$
Loi de Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$\begin{cases} p & \text{si } k=1, \\ 1-p & \text{si } k=0 \end{cases}$	p	$p(1-p)$
Loi binomiale	$\mathcal{B}(n; p)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Loi binomiale négative	$\text{BN}(m; p)$	$\binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m}$	$\frac{m}{p}$	$\frac{m(1-p)}{p^2}$
Loi géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Loi de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
Loi hypergéométrique	$\mathcal{H}(N; n; p)$	$\frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$np(1-p) \frac{N-n}{N-1}$

Loi	Désignation	$G(t)$	Domaine
Loi de Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$1 - p + pt$	$\mathbb{R}$
Loi binomiale	$\mathcal{B}(n; p)$	$(1 - p + pt)^n$	$\mathbb{R}$
Loi géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$\frac{pt}{1 - (1-p)t}$	$\left[-\frac{1}{1-p}; \frac{1}{1-p} \right[$
Loi de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$e^{\lambda(t-1)}$	$\mathbb{R}$

TABLE 11.1 — Fonctions génératrices des lois discrètes classiques.

DEV 1 : Intégrales de Fresnel 35
DEV 2 : Stirling par TCL 46 et 47
DEV 3 : Indécomposabilité de la loi de Poisson 29 et 45

Références

- [AMR11] Mohamed EL AMRANI : Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions. ELLIPSES, 2011.
- [APP24] Walter APPEL : Mathématiques pour l'agrégation externe. Probabilités Ed. 1. De Boeck supérieur, 2024.
- [GOU20] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Analyse - 3e édition. ELLIPSES, 2020.
- [HQ17] Martine QUEFFELEC HERVÉ QUEFFELEC : Analyse complexe et applications. Calvage et Mounet, 2017.
- [MON20] Pierre MONTAGNON : 131 développements pour les oraux - Agrégation externe mathématiques. DUNOD, 2020.

RAPPORT DU JURY :

Dans cette leçon, il faut se garder de proposer un interminable catalogue de propriétés et de "règles" illustrées de quelques rares exemples triviaux (Riemann, Bertrand). Mieux vaut se limiter à quelques résultats fondamentaux bien choisis et mis en perspective, et accompagnés de quelques exemples significatifs. Plutôt que de

se limiter à la seule étude de la convergence de séries, les candidats pourront par exemple s'intéresser à l'estimation de sommes partielles (pour laquelle la comparaison entre somme et intégrale, en présence ou non de monotonie, est un outil particulièrement efficace), à l'étude asymptotique de suites récurrentes (si possible autres que $u_{n+1} = \sin(u_n)$), ou encore à l'itération d'une fonction régulière au voisinage d'un point fixe. L'utilisation de séries entières ou de séries de Fourier pour calculer la somme de certaines séries, le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire discrète fournissent également de riches thèmes d'étude.

Les candidats solides pourront s'intéresser aux procédés de sommation des séries divergentes (qui interviennent naturellement dans la théorie des séries de Fourier, entre autres) ainsi qu'aux théorèmes taubériens qui s'y rapportent.