

Leçon 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Dans cette leçon on considère I un intervalle réel, X une partie de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

1 Fonctions monotones

1.1 Généralités

Définition 1. — On dit que f est croissante lorsque pour tout $x, y \in X, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.

— On dit que f est décroissante lorsque pour tout $x, y \in X, x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$.

— On dit que f est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Remarque 2. On définit les fonctions strictement croissantes/décroissantes/monotones en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Exemple 3. Les fonctions $Id, \exp, x^3$ sont croissantes.

Exemple 4. Une fonction constante est à la fois croissante et décroissante.

Théorème 5. L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.

Proposition 6. Si $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ sont monotones et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f + \lambda g$ est monotone.

Proposition 7. Si f est monotone sur I telle que $f(I)$ soit un intervalle, alors f est continue sur I .

Proposition 8. Une fonction continue réelle est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Proposition 9. Le produit de deux fonctions monotones est monotone si l'une des deux est positive.

Exemple 10. L'identité est croissante mais x^2 ne l'est pas.

Proposition 11. Si f est dérivable sur I , alors f est croissante (resp décroissante) si et seulement si f' est positive (resp négative)

Théorème 12. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone (et continue), alors elle est bijective de I sur $f(I)$ et son inverse est strictement monotone (et continue) de même sens de variation que f .

Exemple 13. La fonction $\exp$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, elle admet une bijection réciproque $\ln$ strictement croissante.

Théorème 14. (ADMIS) Si f est monotone alors f est dérivable presque partout.

1.2 Suites de fonctions

Proposition 15. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions croissantes (resp décroissantes) sur I qui converge vers f , alors f est croissante (resp décroissante).

Théorème 16. (Dini 2) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions croissantes, réelles et continues sur I . Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f alors la convergence est uniforme.

Exemple 17. La suite $f_n : x \mapsto (1 + \frac{x}{n})^n$ converge vers $\exp$.

Exemple 18. La suite de polynômes définie par $P_0 = 0$ et $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n(x))^2$ sur $[-1, 1]$ converge uniformément vers la valeur absolue.

2 Fonctions convexes

2.1 Généralités

Dans cette partie $(E, \|\cdot\|)$ est un EVN, $I \subset E$ est convexe et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ application.

Définition 19. L'application f est dite convexe lorsque pour tout $a, b \in I$ et tout $t \in [0, 1]$ on a $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$. L'application est dite concave lorsque $-f$ est convexe. Lorsque l'inégalité est stricte pour $t \in]0, 1[$ on dit que la fonction est strictement convexe (resp concave).

Exemple 20. Une norme est convexe. La fonction exponentielle réelle est convexe. La fonction logarithme népérien est concave.

Théorème 21. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . On a les équivalences suivantes :

1. f convexe,
2. f' croissante,
3. La courbe de f est au dessus de toutes ses tangentes.

Corollaire 22. Une fonction f deux fois dérivable est convexe si et seulement $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

Théorème 23. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $x, y \in I$ on a $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

Proposition 24. Si $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ sont convexes et $\lambda > 0$ alors $f + \lambda g$ est convexe.

Proposition 25. Si f, g sont convexes et f croissante alors $f \circ g$ est convexe.

Théorème 26. Pour $x \neq y \in I$ on note $p(x, y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ la pente de la droite (MN) avec $M = (x, f(x))$ et $N = (y, f(y))$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe,
2. Pour tout $x < y < z \in I$ on a $p(x, y) \leq p(x, z) \leq p(y, z)$,
3. Pour tout $a \in I$ la fonction $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Proposition 27. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est constante si et seulement si elle est convexe et majorée.

Définition 28. On dit qu'une fonction f est logarithmiquement convexe lorsque la fonction $\ln(f)$ est convexe.

Proposition 29. Une fonction logarithmiquement convexe est convexe.

Théorème 30. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est log-convexe,
2. Pour tout $\alpha > 0$ la fonction $x \mapsto \alpha^x f(x)$ est convexe.
3. Pour tout $x, y \in I$ et tout $\lambda \in [0, 1]$ on a $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}$.
4. Pour tout $\alpha > 0$ la fonction f^α est convexe.

2.2 Régularité

Théorème 31. Si f convexe sur I , alors sa restriction à tout intervalle $[a, b] \in \overset{\circ}{I}$ est lipschitzienne. Ainsi f est continue sur $\overset{\circ}{I}$.

Théorème 32. Si f convexe sur I et dérivable en $\alpha \in \overset{\circ}{I}$ et telle que $f'(\alpha) = 0$, alors elle admet un minimum global en α .

Théorème 33. Si f convexe sur I admet minimum local en α , alors le minimum est global.

Remarque 34. Les résultats avec f concave et les maximums fonctionnent aussi.

Définition 35. On définit pour $x > 0$ la fonction Γ d'Euler par $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ et la fonction Beta pour $x, y > 0$ définie comme $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (a-t)^{y-1} dt$.

Proposition 36. La fonction Γ possède les propriétés suivantes :

1. Γ est de classe C^∞ et convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Γ est log-convexe donc convexe.
3. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\Gamma(n+1) = n!$.
4. La fonction Beta vérifie $B(x, y) = B(y, x)$ et $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$.
5. $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$

3 Applications

3.1 Inégalités de convexité

Proposition 37. (Arithmético-géométrie) Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$ on a alors $(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

Lemme 38. Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors pour tout $u, v \in \mathbb{R}_+^*$ on a $u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{q}$.

Définition 39. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour $p > 0$ et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable on pose $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \in [0, +\infty]$ et $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ le sup essentiel de f . On définit aussi $\mathcal{L}^p(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurables} \mid \|f\|_p < +\infty\}$ et les espaces $L^p(X)$ comme le quotient des $\mathcal{L}^p(X)$ par la relation d'équivalence d'égalité μ presque partout.

Théorème 40. (Young) Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors pour tout $a, b > 0$ on a $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Théorème 41. (Hölder) Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors pour $f \in \mathcal{L}^p(X)$ et $g \in \mathcal{L}^q(X)$ on a $fg \in \mathcal{L}^1(X)$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Théorème 42. (Minkowski) Soient $p \geq 1$ et $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$ alors on a $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Corollaire 43. Pour $p \in [1, +\infty]$ l'application $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(X)$ et une norme sur $L^p(X)$. Ainsi les espaces $L^p(X)$ sont des espaces vectoriels normés.

Théorème 44. (Jensen) Soit I convexe de E et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. La fonction f est convexe si et seulement si pour toute combinaison linéaire $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$ telle que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ on a $f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i)$.

3.2 Résolution d'équations

Lemme 45. Soit C convexe non vide et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ application strictement convexe sur C . Alors il existe au plus un point $x \in C$ minimisant f sur C .

Théorème 46. (Méthode de Newton) Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $[c, d]$, on suppose que $f(x) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$. On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = F(x_n)$ pour tout $n \geq 0$ avec $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. On a alors :

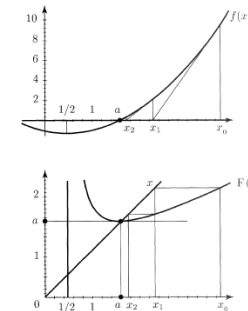
1. f possède une unique racine a qui vérifie pour tout $x \in [c, d]$ qu'il existe $z \in [a, x]$ tel que $F(x) - a = \frac{f''(z)}{2f'(z)}(x - a)^2$.
2. Il existe $C > 0$ tel que $|F(x) - a| \leq C|x - a|$ pour tout $x \in [c, d]$ et il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ soit stable par F . Pour tout $x_0 \in I$ la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge à l'ordre 2 vers a dans I .
3. Si de plus $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$ alors le résultat est vrai sur $I = [a, d]$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) et on a : $0 \leq x_{n+1} - a \leq X(x_n - a)^2$ puis $x_{n+1} - a \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$.

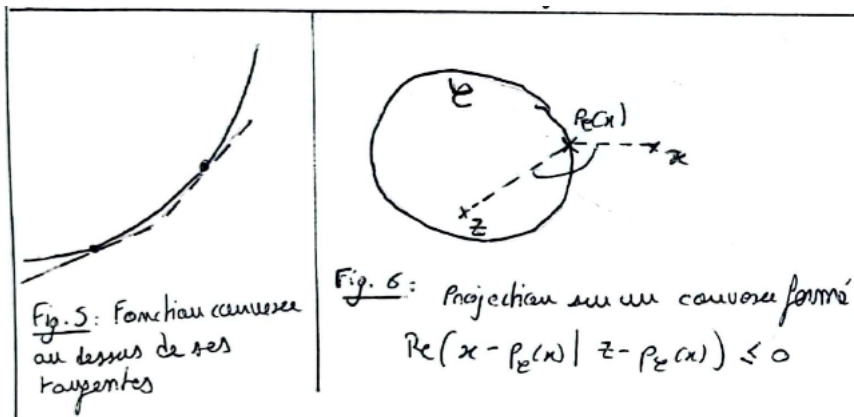
Remarque 47. L'objectif de la méthode de Newton dans le contexte des extrema est de rechercher des points critiques avant de voir si se sont des extrema.

4 PROBABILITES ?

Fonction de répartition croissante cadlag caractérise loi, transfo de Laplace

5 Annexe





Dessin des pentes 26

DEV 1 : Méthode de Newton 46

DEV 2 : Etude de Gamma 36

Références

- [GOU20] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Analyse - 3e édition. ELLIPSES, 2020.
- [GP05] Vincent BECK GABRIEL PEYRE, Jérôme MALICK : Objectif agrégation. HK, 2005.
- [ROM19] JeanÉtienne ROMBALDI : Elements d'analyse réelle. EDP Sciences, 2019.
- [ROU03] François ROUVIERE : Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation. CASSINI, 2003.

RAPPORT DU JURY :

Les définitions et premières propriétés liées à ces notions doivent bien sûr être présentées pour pouvoir aborder les questions de limites et de continuité de ces fonctions et leurs caractérisations à l'aide de leurs dérivées. Il convient d'illustrer son exposé par de nombreux dessins. La convexité est une source inépuisable d'inégalités, dans divers domaines y compris les probabilités. Dans ce même domaine, l'étude des fonctions de répartition de variables aléatoires réelles, fonctions croissantes s'il en est, est une piste intéressante. Au delà de la dimension 1, les fonctions convexes définies sur une partie convexe de $\mathbb{R}^n$

font partie de cette leçon. La recherche de leurs extrema constitue une thématique riche d'exemples.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à des questions de dérivabilité des fonctions monotones, ou de continuité des fonctions convexes définies sur un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$.