

Leçon 228 : Continuité, dérivabilité d'une fonction réelle d'une variable réelle. Exemples et applications

On considère dans cette leçon $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

1 Généralités

1.1 Continuité

Définition 1. Une fonction f est dite continue (resp à gauche, resp à droite) en $\alpha \in I$ lorsque $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$ (resp $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = f(\alpha)$, resp $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$). Si f est continue en tout point de I , f est dite continue sur I .

Théorème 2. Si f est continue en $\alpha \in I$ alors f est bornée au voisinage de α .

Théorème 3. Une fonction f est continue en $\alpha \in I$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers α , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(\alpha)$.

Exemple 4. Les fonctions polynomiales et trigonométriques (sinus, cosinus) sont continues sur $\mathbb{R}$.

Théorème 5. Une fonction f est continue sur I si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert (resp fermé) de $\mathbb{R}$ est un ouvert (resp fermé) de I .

Exemple 6. La fonction définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ n'est pas continue en 0.
La fonction $1_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Théorème 7. Si $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues en $\alpha \in I$, alors les fonctions $|f|$, $f + g$, fg , $\min(f, g)$, $\max(f, g)$ sont continues en α .

Théorème 8. Si $f(\alpha) \neq 0$ et f continue en α , alors $\frac{1}{f}$ est bien définie sur un voisinage de α et continue en α .

Théorème 9. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue en $\alpha \in I$, $f(I) \subset J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ continue en $f(\alpha)$, alors $g \circ f$ est continue en α .

Définition 10. On dit que f est uniformément continue sur I lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Définition 11. On dit que f est k -lipschitzienne sur I avec $k > 0$ lorsque : $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| < k|x - y|$

Proposition 12. f lipschitzienne sur $I \Rightarrow f$ uniformément continue sur $I \Rightarrow f$ continue sur I .

Remarque 13. Les réciproques sont généralement fausses.

Exemple 14. $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément continue. $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$ est uniformément continue mais pas lipschitzienne.

1.2 Dérivabilité

Définition 15. Soit $a \in I$, on dit que f est dérivable en a la limite $\lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t \neq a}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} := f'(a)$ existe et est finie.

Proposition 16. Si f est dérivable en $a \in I$ alors f est continue en a .

Remarque 17. La réciproque est fausse. Par exemple $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto 0$ si $x = 0$; $x^2 \sin(\frac{1}{x})$ sinon. On a si $x \neq 0$ $f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$, en 0 on a $f'(0) = 0$ mais la limite $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ n'existe pas.

Proposition 18. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$ alors :

1. Toute combinaison linéaire de f et g est dérivable en a ,
2. fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
3. Si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Proposition 19. Soit $f : I \rightarrow J$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, f dérivable en $a \in I$ et g dérivable en $b = f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$

Définition 20. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I lorsque f est dérivable sur I et que sa dérivée $f' : x \mapsto f'(x)$ est continue. Par récurrence on définit les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ $k \in \mathbb{N}^*$ qui sont k fois dérivables et avec $f^{(k)}$ continue.

Théorème 21. (Leibniz) Soit $a \in I$ et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ admettant une dérivée n -ième en a , on a alors : $(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a)g^{(n-k)}(a)$ en posant $f^{(0)} = f$ et $g^{(0)} = g$.

Exemple 22. La dérivée n -ième de $x \mapsto x \exp(x)$ est $x \mapsto (x + n) \exp(x)$.

2 Théorèmes principaux

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Proposition 23. Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et f continue alors $f(I)$ est un intervalle.

Théorème 24. (TVI) Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $I = [a, b]$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(a)f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Application 25. L'image d'un convexe de $\mathbb{R}$ par une application continue est un convexe de $\mathbb{R}$.

2.2 Théorèmes des accroissements finis

Théorème 26. (Rolle) Si f est continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Théorème 27. (TAF) Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Théorème 28. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues et dérivables sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $(f(b) - f(a))g'(c) = f'(c)(g(b) - g(a))$.

Corollaire 29. (Règle de l'Hospital) Si $f(a) = g(a) = 0$ et $l = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} < +\infty$ alors $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Théorème 30. (Taylor-Lagrange) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ et telle que $f^{(n+1)}$ existe. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$

Exemple 31.

2.3 Théorèmes sur les compacts

Théorème 32. (Heine) Une fonction continue sur un segment est uniformément continue.

Proposition 33. Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Exemple 34.

3 Applications

3.1 Fonctions définies par une intégrale

Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et I un segment de $\mathbb{R}$ d'extrémité a, b tels que $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$.

Théorème 35. Soit $f : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$; $(x, t) \mapsto f(x, t)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. Pour tous $x \in X$, l'application $f(x, \cdot) : t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceau sur I ,
2. Pour tout $t \in I$ l'application $f(\cdot, t) : x \mapsto f(x, t)$ est continue sur X ,
3. Il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ positive intégrable continue par morceau telle que pour tout $x \in X$ on ait $|f(x, t)| \leq |\varphi(t)|$.

Alors l'application $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto \int_I f(x, t)dt$ est bien définie et continue.

Théorème 36. Soit $f : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$; $(x, t) \mapsto f(x, t)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. Pour tous $x \in X$, l'application $f(x, \cdot) : t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceau sur I ,
2. f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant le théorème précédent,

Alors l'application $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto \int_I f(x, t)dt$ est bien définie, de classe $\mathcal{C}^1(X)$ et pour tout $x \in X$ on a $\phi'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt$.

Remarque 37. Ce théorème se généralise par récurrence pour une fonction de classe $\mathcal{C}^k$.

Application 38. (Étude de Gamma d'Euler) Pour tout $x > 0$ l'application $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ est bien définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$, convexe et $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

3.2 Étude de points fixes

Théorème 39. (Méthode de Newton) Soit $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $c < d$, $f(c) < 0 < f(d)$ et $f(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$. Alors f possède un unique point fixe $\alpha \in]c, d[$. la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in [c, d]$ et $x_{n+1} = F(x_n) := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge de manière quadratique vers α . Si de plus $f'' > 0$ sur $[c, d]$ on a de plus $x_{n+1} - \alpha \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(x_n - \alpha)^2$

Théorème 40. (Picard) Si $f : X \rightarrow X$ où X est fermé de $\mathbb{K}$ est k -contractante. Alors f admet un unique point fixe $a \in X$ et pour tout $u_0 \in X$ la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a et vérifie :

$$|u_n - a| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_1 - x_0|$$

Corollaire 41. Si $f : X \rightarrow X$ avec X fermé de $\mathbb{K}$ tel que $f^p = f \circ \dots \circ f$ est k -contractante. Alors f possède un unique point fixe $a \in X$ pour tout $u_0 \in X$ la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a .

Exemple 42. Les conditions du théorème sont toutes indispensables :

- $f :]0, 1] \rightarrow]0, 1] ; x \mapsto \frac{x}{2}$ n'admet pas de point fixe,
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ vérifie $|f(u) - f(v)| < |u - v|$ mais n'admet pas de point fixe.
- $f : [0, 1] \rightarrow [1, 3/2] ; x \mapsto 1 + \frac{x}{2}$ n'admet pas de point fixe.

DEV 1 : Etude de la fonction Gamma 38

DEV 2 : Méthode de Newton 39

DEV 3 : Point fixe de Picard 40 et 41

ANNEXE :

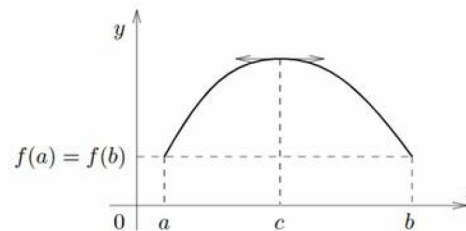


FIGURE 1. Une illustration du théorème de Rolle.

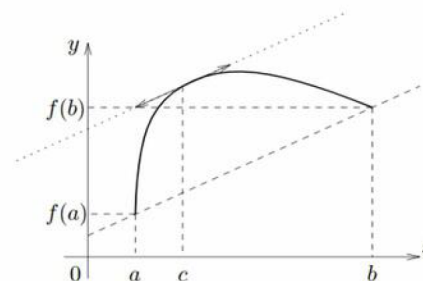


FIGURE 2. Une illustration du théorème des accroissements finis.

Références

- [GOU20] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Analyse - 3e édition. ELLIPSE, 2020.
- [QUE03] Hervé QUEFFELEC : Topologie cours et exercices corrigés. Dunod, 2003.
- [ROM19] Jean Etienne ROMBALDI : Eléments d'analyse réelle. EDP Sciences, 2019.
- [ROU03] François ROUVIERE : Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation. CASSINI, 2003.

RAPPORT DU JURY :

Au delà des définitions et premiers théorèmes, le programme offre de nombreuses pistes aux candidates et candidats pour élaborer leur plan : recherche d'extrema, utilisations de la continuité uniforme, fonctions convexes et leur régularité, approximation par des fonctions régulières, utilisations des formules de Taylor, liens entre caractère $\mathcal{C}^8$ et analytité, etc. Des exemples explicites de fonctions

continues et nulle part dérivables, de fonctions continues et croissantes à dérivée nulle presque partout, de fonctions C^8 à dérivées en un point prescrites, etc. sont les bienvenus dans cette leçon. Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la dérivabilité des fonctions monotones ou lipschitziennes ou à celle de l'intégrale indéfinie d'une fonction intégrable, proposer diverses applications du théorème de Baire (continuité d'une limite simple de fonctions continues, points de continuité d'une dérivée, genericité des fonctions nulle part dérivables parmi les fonctions continues ou des fonctions nulle part analytiques parmi les fonctions C^8 , etc.)