

Leçon 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

1 Suites récurrentes

1.1 Cas réel

Théorème 1. (Caractérisation séquentielle) On a l'équivalence entre les propriétés suivantes :

1. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $l \in I$,
2. pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers l , on a $(f(u_n))_n$ converge vers $f(l)$.

Définition 2. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue avec I intervalle de $\mathbb{R}$. Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$ est appelée suite récurrente d'ordre 1.

Corollaire 3. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in I$ alors $f(l) = l$ donc l est point fixe de f .

Exemple 4. Pour la suite $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, si elle existe la limite l de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $l = l^2 - l - 3$ donc $l = -1$ ou $l = 3$.

Proposition 5. Si la fonction f est croissante alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Si elle est décroissante alors les sous suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ ont un sens de variation opposé.

Exemple 6. Pour $u_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

1.2 Suites classiques

Exemple 7. On appelle suite arithmétique de raison a les suites à valeur dans un ev E , définies par une relations de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + a$. Elle vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation $u_n = u_0 + na$.

Exemple 8. On appelle suite géométrique de raison q une suite réelle ou complexe définie par la relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = qu_n$. Si $|q| < 1$ elle converge vers 0, si $|q| > 1$ elle diverge et si $q = 1$ elle est constante.

Exemple 9. Une suite arithmético-géométrique est une suite réelle ou complexe définie par $u_{n+1} = qu_n + a$. Elle vérifie lorsque $q \neq 1$ la relation pour tout $n \in \mathbb{N}$ suivante $u_n = q^n(u_0 - \frac{a}{1-q}) + \frac{a}{1-q}$.

Définition 10. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelle ou complexe est une récurrence homographique lorsqu'elle vérifie $u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$ avec $ad - bc \neq 0$. Elle est bien définie si et seulement si aucune de ses valeurs n'annule $ax + d$.

Proposition 11. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe homographique et on considère l'équation $cx^2 - (a-d)x - b = 0$.

1. Si l'équation admet 2 racines distinctes α et β alors on a la relation $\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$ avec $k = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}$.
2. Si elle admet une unique racine double α alors on a $\frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + \frac{c}{a - \alpha c} n$

1.3 Suites vectorielles

Définition 12. Soit E un espace métrique et $h \in \mathbb{N}^*$. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite récurrente d'ordre h lorsque pour tout $n \geq h$ on peut écrire $u_n = f(u_{n-1}, \dots, u_{n-h})$ où $f : E^h \rightarrow E$

Définition 13. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre h sur $\mathbb{K}$ lorsque pour tout $n \geq p$ $u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_h u_{n-h}$ avec $a_1, \dots, a_h \in \mathbb{K}$.

Proposition 14. L'équation $x^h - a_1 x^{h-1} - \dots - a_h = 0$ s'appelle équation caractéristique de la récurrence. En notant $r_1, \dots, r_q$ ses racines et $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ leurs multiplicité respectives, alors l'ensemble

des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant l'équation caractéristique est l'ensemble des suites de la forme $u_n = P_1(n)r_1^n + \dots + P_q(n)r_q^n$ où pour tout i , $P_i \in \mathbb{K}_{\alpha_i-1}[X]$.

Exemple 15. Pour le cas d'ordre 2 avec $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$ on a les cas suivants :

1. Si il y a 2 racines distinctes x_1, x_2 alors $u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$ avec $u_0 = \lambda + \mu$ et $\mu_1 = \lambda x_1 + \mu x_2$.
2. Si il n'y a qu'une racine double x alors $u_n = (\lambda n + \mu)x^n$ avec $u_0 = \mu$ et $u_1 = (\lambda + \mu)x$.

Dans le cas où les racines sont complexes $x_1 = \rho e^{i\theta}$ et $x_2 = \rho e^{-i\theta}$ on peut écrire aussi de la forme $u_n = \rho^n(\gamma \cos(n\theta) + \delta \sin(n\theta))$.

Proposition 16. (Déterminant Circulant) Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $P = \alpha_n X^{n-1} + \dots + \alpha_2 X + \alpha_1$ on a alors

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega^i)$$

Applications 17. Soient $\mathcal{P} = (z_1, \dots, z_n)$ un polynôme à n sommets et $a, b \in]0, 1[$ tels que $a + b = 1$. La suite vectorielle définie par $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_{k+1} = (ap_{k,1} + bp_{k,2}, \dots, ap_{k,n} + bp_{k,1})$ où $\mathcal{P}_k = (p_{k,1}, \dots, p_{k,n})$ converge vers l'isobarycentre de $\mathcal{P}$.

Remarque 18. En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+h-1} \end{pmatrix}$ et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ a_h & \dots & \dots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

la matrice compagnon, on a la relation $X_{n+1} = MX_n$.

2 Méthodes de points fixes

Définition 19. Une application $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ est dite k -contractante avec $k \in [0, 1[$ lorsque pour tout $x, y \in \mathbb{K}$ $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Théorème 20. (Picard) Si $f : X \rightarrow X$ où X est fermé de $\mathbb{K}$ est k -contractante. Alors f admet un unique point fixe $a \in X$ et pour tout $u_0 \in X$ la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a et vérifie :

$$|u_n - a| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_1 - x_0|$$

Corollaire 21. Si $f : X \rightarrow X$ avec X fermé de $\mathbb{K}$ tel que $f^p = f \circ \dots \circ f$ est k -contractante. Alors f possède un unique point fixe $a \in X$ pour tout $u_0 \in X$ la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a .

Remarque 22. Les conditions du théorème sont toutes indispensables :

- $f :]0, 1] \rightarrow]0, 1]$; $x \mapsto \frac{x}{2}$ n'admet pas de point fixe,
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ vérifie $|f(u) - f(v)| < |u - v|$ mais n'admet pas de point fixe.
- $f : [0, 1] \rightarrow [1, 3/2]$; $x \mapsto 1 + \frac{x}{2}$ n'admet pas de point fixe.

Théorème 23. Soit (X, d) un espace métrique complet, Y un espace topologique, et $f : X \times Y \rightarrow X$ continue et uniformément contractante en x , dans le sens où il existe $k \in [0, 1[$ tel que : $\forall x, x' \in X, \forall y \in Y, d(f(x, y), f(x', y)) \leq k \cdot d(x, x')$.

Alors, pour tout $y \in Y$ fixé, l'équation $f(x, y) = x$ possède une unique solution $x = \varphi(y)$. Et l'application $\varphi : Y \rightarrow X$ est continue.

Exemple 24. Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue non identique à 1, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique fonction $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$f(0) = \alpha \text{ et } f'(x) = f(\varphi(x))$$

En effet, en posant $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $T : X \rightarrow X$ définie pour $x \in [0, 1]$ par

$$T(f)(x) = g(x) = \alpha + \int_0^x f(\varphi(t))dt$$

On peut montrer que T est contractante et par le théorème précédent, le problème n'admet qu'une unique solution.

Théorème 25. (Cauchy-Lipschitz global) Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue globalement lipschitzienne en y (c'est-à-dire $\exists k > 0, \forall t \in I, \forall y, z \in \mathbb{R}^m, \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq k \|y - z\|$). Alors le système différentiel $y' = f(t, y), y(t_0) = x$ avec $t_0 \in I$ et $x \in \mathbb{R}^m$ admet une unique solution globale sur I .

3 Méthodes itératives

3.1 Recherche de racines

Proposition 26. (Méthode de Newton) Soient $c < d, f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0, \forall x \in [c, d]$. Alors f possède une unique racine $a \in [c, d]$ et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in [c, d]$ et $x_{n+1} = F(x_n) := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge vers a à l'ordre 2. Si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$ alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) et $x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)$

Théorème 27. (Méthode de la sécante) Soit $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $c < d$ et $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [c, d]$. On considère la suite récurrente définie par $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\tau_n}$ avec $\tau_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$. Alors f s'annule en une unique valeur a et il existe $h \in [c, d]$ tel que pour tout $x_0, x_1 \in [a - h, a + h]$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a .

3.2 Systèmes linéaires

Définition 28. On appelle système linéaire de p équations à n in-

$$\text{connues : } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \quad \text{où } a_{ij}, b_j \in \mathbb{K}.$$

On appelle solution du système tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ dont les composantes satisfont toutes les équations. Le système est dit compatible lorsqu'il admet au moins une solution.

Le système peut s'écrire sous forme matricielle $AX = B$ avec $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,n \rrbracket} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), B = {}^t(b_1 \dots b_p) \in \mathcal{M}_{p,1}$ et $X = {}^t(x_1 \dots x_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

On appelle rang du système le rang de la matrice 1.

Remarque 29. L'objectif est, pour un système $Ax = b$ avec A inversible, de construire une suite d'éléments qui va converger vers la solution x du système. On écrit alors $A = M - N$ avec M facilement inversible et la résolution revient alors à trouver $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$ solution. On va faire des approximations successives en considérant la suite définie par $\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b \end{cases}$

Définition 30. Si A matrice réelle inversible, on dit que la méthode itérative associée à la décomposition $A = M - N$ est convergente lorsque pour tout $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ la suite $(x^{(k)})_k$ définie ci dessus est convergente.

Théorème 31. La méthode itérative associée à la décomposition $A = M - N$ est convergente si et seulement si le rayon spectral $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Proposition 32. Si il existe une norme matricielle telle que $\|M^{-1}N\| < 1$ alors la méthode itérative est convergente.

Définition 33. La méthode de Jacobi est définie en prenant M la matrice diagonale des coefficients de A et $N = M - A$.

Théorème 34. Si A est à diagonale strictement dominante (lorsque pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{ii}| > \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$) alors la méthode de Jacobi est convergente.

Définition 35. La méthode de Gauss-Seidel est définie en prenant la M le triangle inférieur de A et $N = M - A$ l'opposé du triangle strictement supérieur de A .

Théorème 36. Si A est à diagonale strictement dominante alors la méthode de Gauss-Seidel est convergente.

Théorème 37. Si la matrice A est symétrique définie positive, alors la méthode de Gauss-Seidel est convergente.

4 Annexe

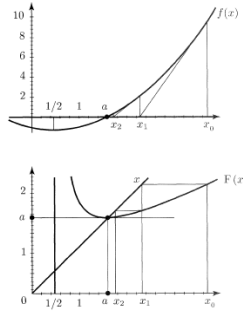
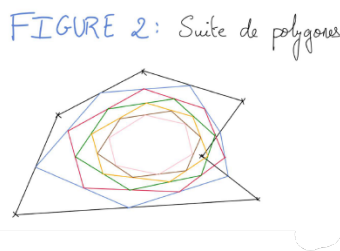


Fig. 75. La méthode de Newton pour l'équation $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$ revient à itérer la fonction $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = (x^2 + 1)/(2x - 1)$.



Dev 1 : Point fixe de Picard 20 et 21
 Dev 2 : Méthode de Newton 26
 Dev 3 : Déterminant circulant 16 et 17

Références

- [ALL05] Grégoire ALLAIRE : Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. Ecole polytechnique, 2005.
- [AMR11] Mohamed EL AMRANI : Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions. ELLIPSES, 2011.
- [GOU20] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Analyse - 3e édition. ELLIPSES, 2020.
- [QUE03] Hervé QUEFFELEC : Topologie cours et exercices corrigés. Dunod, 2003.

- [ROM19] Jean Etienne ROMBALDI : Eléments d'analyse réelle. EDP Sciences, 2019.
- [ROU03] François ROUVIERE : Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation. CASSINI, 2003.

RAPPORT DU JURY :

L'intitulé de la leçon permet de se placer dans des contextes variés : $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, voire certains espaces de Banach fonctionnels. En ce qui concerne le cadre réel, on pourra présenter des exemples d'études asymptotiques (si possible autres que $un+1=\sin(un)$), étudier l'itération d'une fonction suffisamment régulière au voisinage d'un point fixe ou encore présenter des exemples de méthodes de résolution approchée d'équations. En ce qui concerne l'étude asymptotique des suites récurrentes, le jury souligne le fait que la mise en oeuvre d'une analogie discret-continu permet souvent de faire surgir naturellement la suite auxiliaire adaptée. En se plaçant dans $\mathbb{R}^n$, on peut aborder par exemple l'étude des suites vérifiant une relation de récurrence d'ordre 2 ou plus, la convergence en loi de chaînes de Markov à espace d'états fini, l'extension à ce cadre de la méthode de Newton ou plus généralement les méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires. Dans le cadre des espaces de Banach, les applications de la méthode des approximations successives ne manquent pas, qu'il s'agisse de la construction de solutions d'équations différentielles, intégrales, ou fonctionnelles.