

Leçon 223 : Suites réelles et complexes. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

1 Généralités

1.1 Limites et valeurs d'adhérence

Sauf mention du contraire, on travaille dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 1. On appelle suite réelle (resp suite complexe), toute application $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (resp $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$). On parle de suite numérique, on notera $u_n = u(n)$; $\forall n \in \mathbb{N}$ et on parlera de la suite $(u_n)_n$.

Exemple 2. On peut aussi définir des suites par des relations de récurrence :

- Arithmétique : $u_0 = a \in \mathbb{R}$; $u_{n+1} = u_n + r$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a + nr$
- Géométrique : $u_0 = a \in \mathbb{R}$; $u_{n+1} = ru_n$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = ar^n$
- Fibonacci : $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Définition 3. Une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée (resp minorée, resp bornée) lorsque il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \leq A$ (resp $x_n \geq A$, resp $|x_n| \leq A$). La notion de bornée existe pour une suite complexe.

Définition 4. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique et $l \in \mathbb{K}$, on dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet l pour limite lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - l| < \varepsilon$$

Théorème 5. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite alors elle est unique.

Définition 6. Une suite est dite convergente lorsqu'elle admet une limite, sinon elle est dite divergente.

Exemple 7. La suite $(1 + \frac{1}{n})^n$ converge alors que la suite $(-1)^n$ diverge.

Proposition 8. Toute suite convergente est bornée.

Proposition 9. Soit $(u_n)_n$ une suite qui converge vers 0 et $(v_n)_n$ une suite bornée, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n = 0$

Définition 10. On appelle sous suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite $(u_{\varphi(n)})_n$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Définition 11. On appelle valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tout élément limite d'une sous suite convergente.

Proposition 12. Une suite convergente ne possède que sa limite comme valeur d'adhérence.

Proposition 13. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ des suites convergeant vers l et l' respectivement. Alors :

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n + v_n = l + l'$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n = ll'$,
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |l|$,
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda u_n = \lambda l, \lambda \in \mathbb{K}$, Si de plus $l' \neq 0$, alors à partir d'un certain rang $v_n \neq 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{l'}$.

Théorème 14. (Gendarmes) Soient $(u_n)_n, (a_n)_n$ et $(b_n)_n$ des suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $a_n \leq u_n \leq b_n$. Si $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers une même limite $l \in \mathbb{K}$ alors $(u_n)_n$ converge aussi vers l .

Théorème 15. (Césaro) Soit $(u_n)_n$ suite qui converge vers $l \in \mathbb{K}$, alors la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$ converge aussi vers l .

Exemple 16. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que la suite $(u_{n+1} - u_n)_n$ converge vers l , alors la suite $(\frac{u_n}{n})_n$ converge vers l .

1.2 Comparaison de suites

Définition 17. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, on appelle limite supérieure (resp inférieure) de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'élément $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n =$

$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_k$ (resp $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_k$). Ce sont des éléments de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Théorème 18. On peut définir les limites supérieures et inférieures de la manière suivante :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \max\{|l| \mid l \text{ valeur propre de } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \min\{|l| \mid l \text{ valeur propre de } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$$

Définition 19. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ notée $u_n = O(v_n)$ lorsqu'il existe $A > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|u_n| \leq Av_n$.

Remarque 20. En particulier si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée alors $u_n = O(1)$.

Définition 21. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ notée $u_n = o(v_n)$ lorsque : $\forall \varepsilon, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq \varepsilon v_n$.

Définition 22. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ notée $u_n \sim v_n$ lorsque $u_n - v_n = o(|u_n|)$.

Proposition 23. Si $u_n \sim v_n$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .

Proposition 24. Soient $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ des suites, on a alors :

1. $u_n v_n \sim u'_n v'_n$,
2. lorsque c'est bien défini $\frac{u_n}{u'_n} \sim \frac{v_n}{v'_n}$,
3. pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $u_n^k \sim v_n^k$.

Proposition 25. Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang, alors $u_n \sim v_n \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et $u_n = o(v_n) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Définition 26. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes lorsque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n - v_n = 0$.

Exemple 27. Lorsque $n \rightarrow \infty$ on a $e^{-n} \sim \frac{1}{n^2}$.

Théorème 28. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors elles convergent vers une même limite $l \in \mathbb{K}$ et de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq l \leq v_n$.

1.3 Suites de Cauchy

Définition 29. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \geq N, |u_n - u_p| < \varepsilon$

Proposition 30. 1. Toute suite convergente est de Cauchy.
2. Toute suite de Cauchy est bornée.

Proposition 31. Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ toute suite convergente est de Cauchy.

Remarque 32. Les espaces où la réciproque du premier point est vraie sont appelés espaces complets.

Théorème 33. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \leq v_n$, $[u_{n+1}, v_{n+1}] \subset [u_n, v_n]$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n - v_n = 0$. Alors il existe un unique $l \in \mathbb{R}$ tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [u_n, v_n] = \{l\}$.

Exemple 34. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 35. Bolzano-Weierstrass Dans $\mathbb{R}$, toute suite bornée admet une sous suite convergente.

2 Suites particulières

2.1 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Théorème 36. (Caractérisation séquentielle) On a l'équivalence entre les propriétés suivantes :

1. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $l \in I$,
2. pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers l , on a $(f(u_n))_n$ converge vers $f(l)$.

On considère $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue avec I intervalle de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

Définition 37. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie comme ceci est appelée suite récurrente.

Corollaire 38. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in I$ alors $f(l) = l$ donc l est point fixe de f .

Proposition 39. Si la fonction f est croissante alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Si elle est décroissante alors les sous suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ ont un sens de variation opposé.

Définition 40. Une application $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ est dite k -contractante avec $k \in [0, 1[$ lorsque pour tout $x, y \in \mathbb{K}$ $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Théorème 41. (Picard) Si $f : X \rightarrow X$ où X est fermé de $\mathbb{K}$ est k -contractante. Alors f admet un unique point fixe $a \in X$ et pour tout $u_0 \in X$ la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a et vérifie :

$$|u_n - a| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_1 - x_0|$$

Corollaire 42. Si $f : X \rightarrow X$ avec X fermé de $\mathbb{K}$ tel que $f^p = f \circ \dots \circ f$ est k -contractante. Alors f possède un unique point fixe $a \in X$ pour tout $u_0 \in X$ la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a .

Exemple 43. Les conditions du théorème sont toutes indispensables :

- $f :]0, 1] \rightarrow]0, 1] ; x \mapsto \frac{x}{2}$ n'admet pas de point fixe,
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ vérifie $|f(u) - f(v)| < |u - v|$ mais n'admet pas de point fixe.
- $f : [0, 1] \rightarrow [1, 3/2] ; x \mapsto 1 + \frac{x}{2}$ n'admet pas de point fixe.

Proposition 44. (Méthode de Newton) Soient $c < d$, $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0, \forall x \in [c, d]$. Alors f possède une unique racine $a \in [c, d]$ et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in [c, d]$ et $x_{n+1} = F(x_n) := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge vers a à l'ordre 2. Si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$ alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) et $x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)$

2.2 Série numérique

Définition 45. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique, on appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_n$ définie par $S_n = u_1 + \dots + u_n$, notée $\sum u_n$. On dit que la série $\sum u_n$ converge lorsque la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles converge, dans ce cas la limite S de $(S_n)_n$ est notée $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$

Exemple 46. Si $a \neq 1$ on a $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, donc la série $\sum a^k$ converge si et seulement si $|a| < 1$ et $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$.

Proposition 47. On ne modifie pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Proposition 48. Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Remarque 49. La réciproque est fautive, par exemple la suite $(\ln(1 + \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 pourtant $\sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{1}{k}) = \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ donc la série diverge.

Définition 50. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 on dit que la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Théorème 51. (Cauchy) La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq p \geq N, |\sum_{k=n+1}^p u_k| < \varepsilon$.

Exemple 52. Pour $u_n = \frac{1}{n}$ on a $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ donc diverge.

3 Annexe

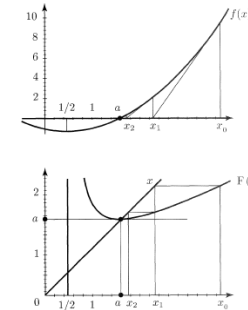


Fig. 75. La méthode de Newton pour l'équation $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$ revient à itérer la fonction $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = (x^2 + 1)/(2x - 1)$.

Dev 1 : Point fixe de Picard 41 et 42
Dev 2 : Méthode de Newton 44

Références

- [AMR11] Mohammed EL AMRANI : Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions. ELLIPSE, 2011.
- [QUE03] Hervé QUEFFELEC : Topologie cours et exercices corrigés. Dunod, 2003.
- [ROU03] François ROUVIERE : Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation. CASSINI, 2003.

RAPPORT DU JURY :

L'utilisation des valeurs d'adhérence pour montrer des convergences ou des continuités, ainsi que celle des limites inférieures et supérieures d'une suite réelle (qui permettent des rédactions expurgées d'epsilons superflus) sont des thèmes centraux. Le théorème de Bolzano-Weierstrass ainsi que celui de Cesàro, que les candidates et candidats doivent savoir démontrer, sont incontournables dans cette leçon. Sans se limiter aux cas convergents, on peut également présenter des exemples d'études asymptotiques de suites définies par des sommes ou des relations de récurrence, voire implicitement. D'autres pistes, comme les différentes méthodes d'approximation des réels par des irrationnels, la résolution numérique d'équations et leur vitesse de convergence peuvent être explorées.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser par exemple à l'équirépartition, à l'étude de systèmes dynamiques discrets, à l'accélération de la convergence, aux procédés de sommation des séries divergentes et aux théorèmes taubériens qui en découlent.