

Leçon 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Dans cette leçon $n \geq 1$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

1 Théorie des EDL

1.1 Généralités

Définition 1. Soient $A_0, \dots, A_{p-1} : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ continues. On appelle équation différentielle linéaire (EDL) d'ordre p toute équation de la forme

$$(E) : Y^{(p)} = \sum_{k=0}^{p-1} A_k(t) Y^{(k)}(t) + B(t)$$

d'inconnue $Y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$.

Lorsque $B = 0$ elle est dite homogène. On notera à présent (H) l'équation homogène associée à (E) et $S_I(E)$ l'ensemble des solutions de (E) sur I .

Remarque 2. Toute EDL réduite d'ordre p peut se ramener à une

EDL d'ordre 1 en posant $X = \begin{pmatrix} Y' \\ Y'' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ B(t) \end{pmatrix}$, $C_p =$

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & I_n \\ A_0(t) & A_1(t) & \dots & \dots & A_{p-1}(t) \end{pmatrix}. \text{ On a alors } X' = C_p X + B.$$

On considérera à présent toujours des EDL d'ordre 1.

1.2 Théorème de Cauchy linéaire

Définition 3. On appelle problème de Cauchy la recherche d'une solution d'une EDO avec condition initiale. On pose alors (P) le problème de Cauchy (E) et $Y(t_0) = y_0$ avec $t_0 \in I$.

Théorème 4. (Point fixe de Picard) Soit (X, d) un espace complet et une application $f : X \rightarrow X$ k -contractante, alors :

1. f possède un unique point fixe $a \in X$,
2. Pour tout $x_0 \in X$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par x_0 et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a , de plus :

$$d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$$

Corollaire 5. Soit (X, d) un espace métrique complet, et $f : X \rightarrow X$ ayant une itérée f^p contractante, alors :

1. f possède un unique point fixe $a \in X$,
2. Pour tout $x_0 \in X$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par x_0 et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a .

Théorème 6. (Cauchy Lipschitz linéaire) Le problème de Cauchy (P) possède une unique solution globale.

Proposition 7. 1. L'ensemble $S_I(H)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$.

2. Pour tout $t_0 \in I$ l'application $\Phi_{t_0} : S_I(H) \rightarrow \mathbb{K}^n$; $y \mapsto y(t_0)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. $S_I(H)$ est un espace vectoriel de dimension n .

1.3 Matrice fondamentale et Wronskien

Définition 8. Un système fondamental de solutions de (H) est une famille $(y_1, \dots, y_n)$ de solutions indépendantes de (H) .

La matrice $\Phi(t) = (y_1(t) \dots y_n(t))$ constituées de ces solutions en vecteurs colonnes est appelée matrice fondamentale de (H) .

Le déterminant de cette matrice est appelé Wronskien $W(t)$ de ce système fondamental.

Proposition 9. Soient $(y_1, \dots, y_n) \in S_I(H)^n$ des solutions, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(y_1, \dots, y_n)$ est un système fondamental de (H) ;
2. Pour tout $t \in I$, $W(t) \neq 0$;
3. Il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$.

Proposition 10. (Identité d'Abel) Soit $\Phi(t)$ matrice fondamentale de (H) , alors le Wronskien associé vérifie $W'(t) = \text{Tr}(A(t))W(t)$.

Proposition 11. Une application $\Phi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$ est une matrice fondamentale de (H) si et seulement si Φ est dérivable et inversible sur I et $\Phi'(t) = \Phi(t)A(t)$ pour tout $t \in I$.

Proposition 12. — Soient $y_1, \dots, y_n$ des solutions indépendantes de (H) . Si $y \in S_I(H)$ alors il existe des constantes $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}$ telles que $y = \sum_{i=1}^n C_i y_i$.

— Soit $\Phi(t)$ matrice fondamentale de (H) , alors les solutions de (H) s'écrivent $y(t) = \phi(t)C$ pour $t \in I$ où $C \in \mathbb{K}^n$ constant.

Corollaire 13. Soit $y_0 \in \mathbb{K}^n$ et $t_0 \in I$, une solution du problème de Cauchy (H) et $Y(t_0) = y_0$ est $y(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0$ pour $t \in I$.

2 Résolution explicite

2.1 Équations homogènes

Proposition 14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors la matrice fondamentale du système (H) est $\Phi(t) = e^{tA}C$ avec $C \in \mathbb{K}^n$ constant. Pour $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}^n$, la solutions (H) telle que $y(t_0) = y_0$ s'écrit $e^{(t-t_0)A}C$.

Exemple 15. Soit $(H) : Y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y$, ses solutions sont de la forme $Y = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K$

Théorème 16. Cas des équations scalaires d'ordre 2 $(H) : y'' + by' + cy = 0$. On pose $P(X) = X^2 + bX + c = (X - r_1)(X - r_2)$ et $\Delta = b^2 - 4c$.

- Si $\Delta = 0$ alors r_1 est racine double et les solutions réelles sont $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{r_1 t}$.
- Si $\Delta > 0$ alors $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ distinctes et les solutions sont $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$.
- Si $\Delta < 0$ alors les racines sont complexes conjuguées $r_1 = \rho + i\sigma$ et $r_2 = \rho - i\sigma$ et les solutions sont $y(t) = e^{\rho t}(\alpha \cos(\sigma t) + \beta \sin(\sigma t))$.

Exemple 17. Les solutions réelles de $y'' - 3y' - 4y = 0$ sont $y(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{4t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2.2 Solutions particulières

Théorème 18. On veut résoudre l'équation (E) d'équation homogène (H) , la solution de (H) est de la forme $\Phi(t)C$ où C est constante. On va "faire varier la constante" en écrivant une solution de (E) sous la forme $y(t) = \Phi(t)C(t)$. Ainsi y est solution si et seulement si $C'(t) = \Phi(t)^{-1}B(t)$ puis on primitive et on obtient une solution particulière de (E) .

Proposition 19. (Formule de Duhamel) La solution du problème de Cauchy (P) est donnée par $y(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0 + \int_{t_0}^t \phi(t)\phi(s)^{-1}B(s)ds$.

Exemple 20. On peut retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ grâce à la fonction $h(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{1+x^2} dx$ qui est solution de l'EDL $h'(t) = h(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}$

Théorème 21. Si $a_0, \dots, a_{p-1}, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont développables en série entières au voisinage de $t_0 \in I$, alors l'équation $(E) = y^{(p)} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k y^{(k)} + b$ admet une solution développable en série entière au voisinage de t_0 dont on peut trouver les coefficients.

Exemple 22. L'équation différentielle (de Bessel) admet une unique solution développable en série entière en 0 et valant 1 en 0 qui est $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^n$.

3 Étude qualitative

3.1 Stabilité des solutions

Définition 23. Une équation différentielle est dite autonome lorsque $y' = f(y)$ où $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ où Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On dit que $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre lorsque $f(\bar{y}) = 0$. Dans ce cas la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $Y(t) = \bar{y}$ est solution de l'équation $Y' = f(Y)$.

Définition 24. On considère le système autonome $Y' = f(Y)$ et $Y(t_0) = y_0$. Un point d'équilibre $\bar{y}$ est stable lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $\|y_0 - \bar{y}\| \leq \delta$ alors Y_{y_0} est solution maximale du problème de Cauchy définie sur $[t_0, +\infty[$ et pour tout $t > t_0$ on a $\|Y_{y_0} - \bar{y}\| < \varepsilon$.

On dit qu'il est asymptotiquement instable lorsqu'il est stable et qu'il existe un voisinage V de $\bar{y}$ tel que pour tout $y_0 \in V$, $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_{y_0}(t) = \bar{y}$.

Exemple 25. Pour l'équation $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} Y$, le point $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un point d'équilibre stable.

3.2 Portrait de phase en dimension 2

On étudie l'allure des trajectoires des solutions du système différentiel $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ noté $Y' = AY$, on suppose que $\det(A) \neq 0$.

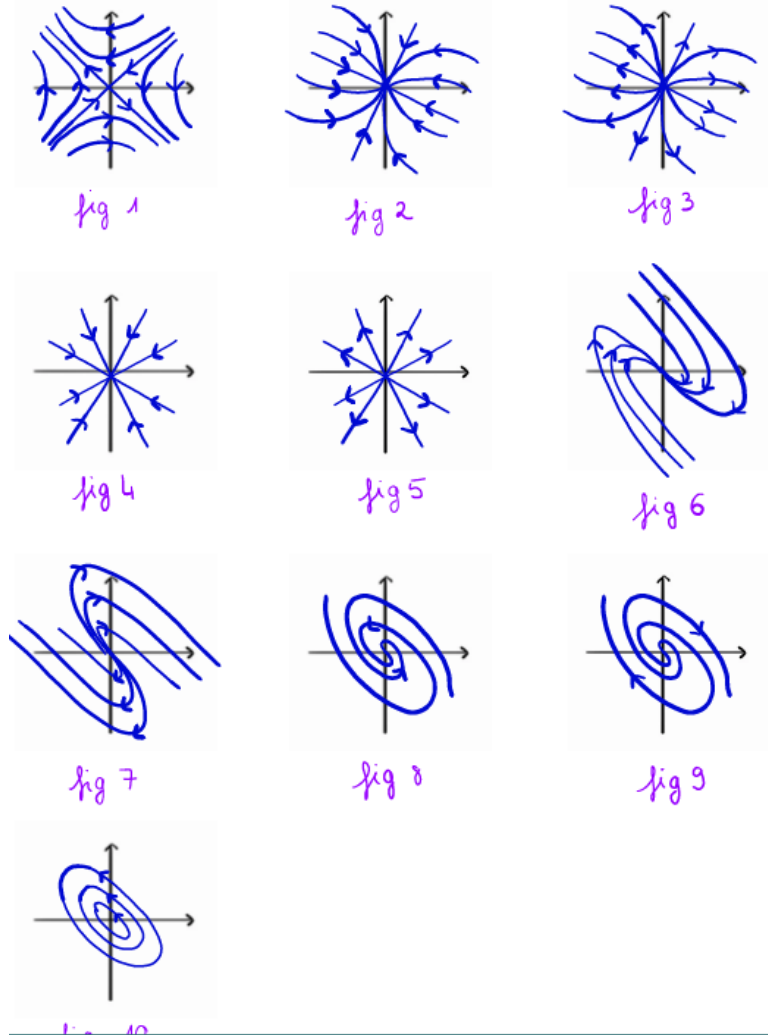
L'allure des solutions dépend de la nature des valeurs propres de A notées λ_1 et λ_2 . On distingue alors plusieurs types de points d'équilibre :

1. Si A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$:
 - Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ c'est un point selle (1)
 - Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ c'est un nœud stable (2)
 - Si $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ c'est un nœud instable (3)
 - Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ c'est un puits (4)
 - Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ c'est une source (5)
2. Si A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ avec une valeur propre double réelle λ :
 - Si $\lambda < 0$ c'est un nœud dégénéré stable (6)
 - Si $\lambda > 0$ c'est un nœud dégénéré instable (7)

3. Si A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ de valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ avec $\beta \neq 0$ alors :
 - Si $\alpha < 0$ c'est un foyer stable (8)
 - Si $\alpha > 0$ c'est un foyer instable (9)
 - Si $\alpha = 0$ c'est un centre (10)

Voir en annexe les représentations en portrait de phase associés.

4 Annexe



DEV 1 : Cauchy Lipschitz linéaire 6
DEV 2 : Gauss par équation différentielles 20 [CAL23]
DEV3 : Equation de Bessel 22 [FRA12]

Références

- [BER21] Florent BERTHELIN : Équations différentielles. Cassini, 2021.
- [CAL23] Philippe CALDERO : Carnet de voyages en Analystan. Calvage et Mounet, 2023.
- [FRA12] Serge FRANCINO : Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures . Analyse . Tome IV. Cassini, 2012.
- [GOU20] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Analyse - 3e édition. Ellipses, 2020.

RAPPORT DU JURY :

La théorie de Cauchy-Lipschitz linéaire est une porte d'entrée naturelle pour cette leçon. La complétude (via la méthode des approximations successives) y joue un rôle crucial, et la preuve est un exemple fondamental d'intervention de la dimension finie en analyse. Sans que cet aspect devienne trop prépondérant, les candidates et candidats peuvent proposer quelques exemples de résolutions explicites : cas scalaire d'ordre un qui fait intervenir des outils élémentaires, cas des coefficients constants avec l'exponentielle de matrice (qui mobilise fortement la réduction des endomorphismes), utilisation de séries entières ou de séries de Fourier, variation des constantes, etc. On se gardera d'aborder des théorèmes généraux s'appliquant au cas non linéaire qui sont réservés à la leçon 220. Même dans le cadre linéaire, les études qualitatives présentent un grand intérêt et fournissent de nombreuses possibilités : étude du comportement asymptotique des solutions (pour lequel le lemme de Grönwall est un outil d'une grande efficacité), de la distribution des zéros, du Wronskien, etc. Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la linéarisation d'équations non linéaires au voisinage d'un point d'équilibre, proposer des exemples de problèmes aux limites (théorie de Sturm-Liouville) ou d'études d'équations aux dérivées partielles linéaires.