

Leçon 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Dans cette leçon on considère E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé, $X \subset E$, $a \in X$ et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

1 Existence et unicité

Définition 1. On dit que f admet un maximum (resp minimum) global en a lorsque pour tout $x \in X$, on a $f(x) \leq f(a)$ (resp $f(x) \leq f(a)$).

On dit que f admet un maximum (resp minimum) local en a lorsqu'il un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V \cap X$, on a $f(x) \leq f(a)$ (resp $f(x) \leq f(a)$).

Ce maximum (resp minimum) est dit strict lorsque les inégalités sont strictes pour $x \neq a$.

Le terme extremum désigne un maximum ou minimum.

Proposition 2. Un extremum global est aussi local mais la réciproque est fausse.

1.1 Compacité[GP05]

Théorème 3. Si X compact et f continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Définition 4. On dit que f est coercive lorsque $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Exemple 5. Une norme est coercive mais pas une application linéaire.

Proposition 6. Si X est de dimension finie, f est coercive et $C \subset X$ fermé alors f est minorée sur C et atteint son minimum.

Proposition 7. Soit F un sous espace vectoriel de X de dimension finie, alors pour tout $x \in F$ il existe $z \in F$ tel que $\|x - z\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.

1.2 Fonctions convexes

Dans cette partie X est dimension finie, $C \subset X$ convexe et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$. On désigne par I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Définition 8. On dit que f est convexe sur C lorsque pour tout $x, y \in C$, pour tout $t \in [0, 1]$ on a $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Remarque 9. Graphiquement cela signifie que f est au dessous de toutes ses cordes.

Proposition 10. Une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est constante si et seulement si elle est convexe et majorée.

Proposition 11. Si $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et dérivable en $\alpha \in \overset{\circ}{I}$ tel que $f'(\alpha) = 0$ alors f admet un minimum global en α .

Proposition 12. Si $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et admet un minimum local, alors ce minimum est global.

1.3 Espaces de Hilbert

Proposition 13. (Identité du parallélogramme) Soit E un espace préhilbertien et $x, y \in E$, alors $\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Théorème 14. (Projection sur un convexe fermé) Soit C une partie fermée, convexe et non vide de E . Alors pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in C$ tel que : $\|x - y\| = d(x, C)$.

Ce point est appelé **projeté de x sur C** et noté $P_C(x)$, et possède la propriété caractéristique suivante : $\forall z \in C, \operatorname{Re}(\langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle) \leq 0$

Corollaire 15. Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent on a : $\forall x_1, x_2 \in E, \|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$

Proposition 16. Soit F un sous espace vectoriel fermé de E . Alors P_F est un opérateur linéaire de E dans F . Si $x \in E$, alors $P_F(x)$ est l'unique élément $y \in F$ tel que : $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

Corollaire 17. Pour tout sous espace vectoriel fermé F de E , on a : $E = F \oplus F^\perp$.

Théorème 18. (de représentation de Riesz) L'application de E dans E^* définie par $\Phi : y \mapsto \phi_y = \langle \cdot, y \rangle$ est une isométrie surjective. C'est à dire, pour toute forme linéaire continue ϕ sur E , il existe un unique $y \in E$ tel que $\forall x \in E, \phi(x) = \langle x, y \rangle$, de plus $\|\phi\| = \|y\|$.
Cette application Φ est de plus antilinéaire.

2 Calcul différentiel

Dans cette partie U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

2.1 Conditions de premier ordre

Définition 19. Un point $a \in U$ tel que $df_a = 0$ est appelé point critique de f .

Proposition 20. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ admet un extremum relatif en $a \in U$ et si f est différentiable en a , alors a est un point critique de f .

Exemple 21. Dans $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^2$ admet un minimum en 0.

Remarque 22. La réciproque est fautive. Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ a sa dérivée qui s'annule en 0, pourtant ce n'est pas un extremum, on appelle cela un point selle.

Théorème 23. (Rolle) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 24. (Accroissements finis) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

2.2 Conditions de second ordre

On suppose ici que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .

Définition 25. On appelle matrice Hessienne de f en $a \in U$ la matrice $H_f(a) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a))_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$. Comme f de classe $\mathcal{C}^2$, cette matrice est symétrique.

Théorème 26. Soit a un point critique de f , par Taylor-Young on a $f(a + h) + \frac{1}{2}H_f(h) + o(\|h\|^2)$ et de plus :

1. Si f admet un minimum (resp maximum) local en a alors $H_f(a)$ est symétrique définie positive (resp négative).
2. Si $H_f(a)$ est définie positive (resp négative) alors f admet un minimum (resp maximum) local en a .

Exemple 27. En dimension 2, on suppose a point critique et $H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ on a alors :

1. Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ alors f admet minimum local en a .
2. Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ alors f admet maximum local en a .
3. Si $rt - s^2 < 0$ alors f n'a pas d'extremum en a (point selle).
4. Si $rt - s^2 = 0$ alors on ne peut pas conclure.

Exemple 28. La fonction $(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ admet 3 points critiques $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Le premier est un point selle et les 2 autres sont des minimums.

2.3 Optimisation sous contrainte

Théorème 29. (Extremas liés) Soient $g_1, \dots, g_p : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on pose $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}$. Si $f|_\Gamma$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $dg_1(a), \dots, dg_p(a)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ (appelés multiplicateurs de Lagrange) tels que $df(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \dots + \lambda_p dg_p(a)$.

Exemple 30. A partir de ce théorème on peut retrouver l'inégalité arithmético-géométrique : $(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ pour tous réels positifs.

Remarque 31. En termes de sous variétés cela signifie que $\bigcap_{i=1}^p \ker(dg_i(a)) \subset \ker(df(a))$.

Exemple 32. La condition d'indépendance des g_i est importante, en effet pour $f(x, y) = x + y^2$ minimisé sous la contrainte $g(x, y) = x^3 - y^2 = 0$. Le minimum se situe en $(0, 0)$ et $dg(0, 0) = 0$ alors que $df(0, 0) = 1$.

3 Optimisation numérique

Théorème 33. (Méthode de Newton) Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $[c, d]$, on suppose que $f(x) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$. On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = F(x_n)$ pour tout $n \geq 0$ avec $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. On a alors :

1. f possède une unique racine a qui vérifie pour tout $x \in [c, d]$ qu'il existe $z \in [a, x]$ tel que $F(x) - a = \frac{f''(z)}{2f'(z)}(x - a)^2$.
2. Il existe $C > 0$ tel que $|F(x) - a| \leq C|x - a|$ pour tout $x \in [c, d]$ et il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ soit stable par F . Pour tout $x_0 \in I$ la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge à l'ordre 2 vers a dans I .
3. SI de plus $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$ alors le résultat est vrai sur $I = [a, d]$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) et on a : $0 \leq x_{n+1} - a \leq X(x_n - a)^2$ puis $x_{n+1} - a \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$.

Remarque 34. L'objectif de la méthode de Newton dans le contexte des extrema est de rechercher des points critiques avant de voir si se sont des extrema.

4 Annexe

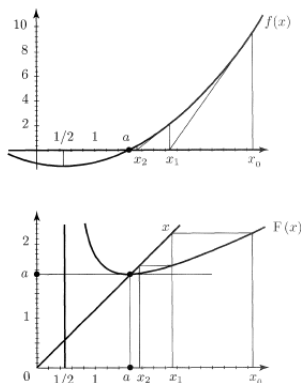


Fig. 75. La méthode de Newton pour l'équation $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$ revient à itérer la fonction $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = (x^2 + 1)/(2x - 1)$.

Dessins de la dimension 2, points selles ect

DEV 1 : Projection convexe fermé et Riesz 14, 15 et 18
DEV 2 : Méthode de Newton 33

Références

- [FH99] Gilles LACOMBE FRANCIS HIRSH : Éléments d'analyse fonctionnelle. Dunod, 1999.
- [GOU20] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Analyse - 3e édition. ELLIPSES, 2020.
- [GP05] Vincent BECK GABRIEL PEYRE, Jérôme MALICK : Objectif agrégation. HK, 2005.
- [ROM19] JeanÉtienne ROMBALDI : Elements d'analyse réelle. EDP Sciences, 2019.
- [ROU03] François ROUVIERE : Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation. CASSINI, 2003.

RAPPORT DU JURY :

Cette leçon offre aux candidates et candidats une multitude d'approches possibles : utilisation de la topologie, du calcul différentiel, de la convexité (fonctions convexes, projection sur un convexe fermé et leurs multiples applications), de l'holomorphie. Les candidates et candidats peuvent proposer des problèmes d'optimisation sous contraintes, si possible autres que la preuve de l'inégalité arithmético-géométrique. À ce sujet, une bonne compréhension de la méthode des multiplicateurs de Lagrange requiert celle de la notion d'espace tangent, qui en donne une justification beaucoup plus claire que certains raisonnements purement matriciels. Les algorithmes de recherche d'extremums ont également leur place dans cette leçon (méthode de Newton, du gradient à pas optimal, problème des moindres carrés, etc).

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux diverses versions du principe du maximum (fonctions holomorphes ou harmoniques, équations aux dérivées partielles), au calcul des variations, ou réfléchir à l'unicité de la meilleure approximation dans divers espaces fonctionnels, à commencer par celle des fonctions continues sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d .