

Leçon 218 : Formules de Taylor. Exemples et applications.

On considère $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1 Formules de Taylor

1.1 Préliminaires

Théorème 1. (Rolle) Soit K compact de E d'intérieur non vide et f continue de K dans $\mathbb{R}$, différentiable sur $\overset{\circ}{K}$ et constante sur $\text{Fr}(K)$. Alors il existe $c \in K$ tel que $df(c) = 0$.

Théorème 2. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $a \neq b$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exemple 3. Une telle fonction peut être $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1, 1]$ dérivable sur $] -1, 1[$. Si f n'est pas dérivable sur l'intervalle tout entier ce n'est plus vrai par exemple $x \mapsto |x|$.

Théorème 4. (Accroissements finis) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Remarque 5. Ce théorème n'est plus valable dans le cas complexe (ou $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$ par exemple $x \mapsto e^{ix}$ sur $[0, 2\pi]$).

Théorème 6. Soit f à valeur réelle définie et différentiable sur un ouvert $O \subset \mathbb{R}^n$. Si $a, b = (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in O$ tels que $[a, b] \subset O$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(c)(b_k - a_k)$

Théorème 7. (IAF) Si f à valeur dans un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ définie sur un compact $[a, b]$, continue sur cet intervalle et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\| (b - a)$

1.2 Fonctions réelles

Théorème 8. (Taylor-Lagrange) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et dérivable $n + 1$ fois sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b - a)^{n+1}$$

Corollaire 9. Si $f : [a, b] \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^n$ et $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$ avec $f^{(n+1)}$ majorée par M sur $]a, b[$ alors on a :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k \right\| \leq \frac{M}{(n+1)!} (b - a)^{n+1}$$

Remarque 10. Pour $n = 0$ c'est inégalité des accroissements finis.

Théorème 11. (Taylor à reste intégral) Si $f : [a, b] \rightarrow E$ où E complet de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et dérivable $n + 1$ fois sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b - t)^n dt$$

Théorème 12. (Taylor-Young) Si $f : [a, b] \rightarrow E$ où E complet de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et dérivable $n + 1$ fois sur $]a, b[$, alors lorsque $h \rightarrow 0$ on a :

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k f^{(k)}(a)}{k!} + \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(a)}{n!} + o(h^{n+1})$$

Exemple 13. On a les inégalités suivantes :

1. $\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3},$
2. $\forall x \geq 0, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

1.3 Fonctions de plusieurs variables

Théorème 14. (Taylor-Lagrange) Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur U , $A(a, b), M(x, y) \in U$ tels que le segment $[A, M] \subset U$. Alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(x, y) = \sum_{i+j \leq p-1} \frac{(x-a)^i (y-b)^j}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(a, b) + \sum_{i+j=p} \frac{(x-a)^i (y-b)^j}{i!j!} \frac{\partial^p f}{\partial x^i \partial y^j}(a + \theta u, b + \theta v)$$

Corollaire 15. (Taylor-Young) Sous les mêmes hypothèses que le précédent, on pose B la boule centrée en $A(a, b)$ de rayon $r > 0$ contenue dans U . Alors il existe $\varepsilon : B \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \varepsilon(x, y) = 0$ et pour tout $(x, y) \in B$ on ait :

$$f(x, y) = \sum_{i+j \leq p-1} \frac{(x-a)^i (y-b)^j}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(a, b) + \|(x-a, y-b)\|^p \varepsilon(x, y)$$

Théorème 16. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in U$. Pour $x \in U$ proche de a on a :

$$f(x) = f(a) + df_a(x-a) + \frac{1}{2} d^2 f_a(x-a) + o(\|x-a\|^2)$$

2 Exemples et applications

2.1 Développements limités

On considère $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non réduit à un singleton.

Définition 17. Soit $f : I \rightarrow E$ application et on suppose $0 \in I$. On dit que f admet un développement limité (DL) à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ si il existe $a_0, \dots, a_n \in E$ tels que au voisinage de 0 on ait

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$$

Proposition 18. Lorsqu'il existe un développement limité d'une fonction f est unique.

Proposition 19. Si f admet un DL à l'ordre $n \geq 1$ au voisinage de 0, $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$. Alors $f(0) = a_0$, f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.

Remarque 20. Attention même si $n \geq 2$ il n'y a pas forcément existence de $f''(0)$. Par exemple $f : x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3 \sin(\frac{1}{x^2})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ vérifie au voisinage de 0 le DL $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Proposition 21. Soit $f :]-a, a[\rightarrow E$ admettant un DL au voisinage de 0 un DL $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$. Si f est paire (resp impaire) alors tous les a_k avec k impairs (resp pairs) sont nuls.

Proposition 22. Si $f : I \rightarrow E$ est dérivable n fois en 0, alors f admet un DL à l'ordre n en 0 qui est le suivant :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^n)$$

Exemple 23. Voici quelques développements limités usuels au voisinage de 0 :

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
2. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$
3. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$

Exemple 24. On peut trouver la limite d'une forme indéterminée : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)-x}{\sin(x)-x} = -2$.

2.2 Probabilités

Définition 25. Soit X une variable aléatoire réelle, on appelle fonction caractéristique de X la fonction $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; $t \mapsto \mathbb{E}[e^{itX}]$.

Définition 26. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles et X une var. On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X noté $(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ lorsque pour tout $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X)]$.

Théorème 27. On a l'équivalence : $(X_n)_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \mathbb{E}[f(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X)]$.

Théorème 28. (Lévy) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles, on a l'équivalence : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \varphi_{X_n} \xrightarrow{cvs} \varphi_X$.

Théorème 29. (Central Limite) Soit $(X_n)_n$ suite de variables aléatoires qui admettent un moment d'ordre 2, $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ alors $\frac{S_n - mn}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1)$

Application 30. On a la formule de Stirling $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Proposition 31. Soient X et Y des variables aléatoires réelles, alors :

1. φ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}$,
2. $P_X = P_Y \iff \varphi_X = \varphi_Y$
3. Si $\varphi_X \in L^1(\mathbb{R})$ alors X admet une densité f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_X(t) dt$

2.3 Résolution numérique

Théorème 32. (Méthode de Newton) Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $[c, d]$, on suppose que $f(x) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$. On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = F(x_n)$ pour tout $n \geq 0$ avec $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. On a alors :

1. f possède une unique racine a qui vérifie pour tout $x \in [c, d]$ qu'il existe $z \in [a, x]$ tel que $F(x) - a = \frac{f''(z)}{2f'(z)}(x - a)^2$.
2. Il existe $C > 0$ tel que $|F(x) - a| \leq C|x - a|$ pour tout $x \in [c, d]$ et il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ soit stable par F . Pour tout $x_0 \in I$ la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge à l'ordre 2 vers a dans I .
3. Si de plus $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$ alors le résultat est vrai sur $I = [a, d]$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) et on a : $0 \leq x_{n+1} - a \leq X(x_n - a)^2$ puis $x_{n+1} - a \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$.

Remarque 33. L'objectif de la méthode de Newton dans le contexte des extrema est de rechercher des points critiques avant de voir si se sont des extrema.

3 Annexe

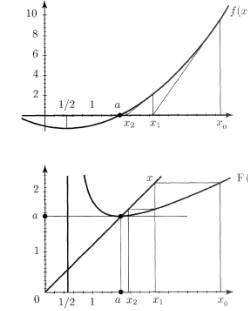


Fig. 75. La méthode de Newton pour l'équation $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$ revient à itérer la fonction $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = (x^2 + 1)/(2x - 1)$.

DEV 1 : Levy et TCL 27, 28 et 29
DEV 2 : Méthode de Newton 32

Références

- [GOU20] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Analyse - 3e édition. ELLIPSES, 2020.
- [HQ20] Claude ZUILY HERVÉ QUEFFELEC : Analyse pour l'agrégation - Agrégation/Master Mathématiques. Dunod, 2020.
- [ROM19] Jean Etienne ROMBALDI : Eléments d'analyse réelle. EDP Sciences, 2019.
- [ROU03] François ROUVIERE : Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation. CASSINI, 2003.

RAPPORT DU JURY :
La connaissance des différentes formules de Taylor, en une, ou plusieurs variables, de leurs différences et de leurs champs d'applications, allant de la géométrie (par exemple la position d'une courbe

ou une surface par rapport à son espace tangent) jusqu'aux probabilités (comme par exemple le théorème central limite), doit constituer le coeur de la leçon. Les énoncés devront être illustrés par des exemples pertinents. En général, le développement de Taylor d'une fonction comprend un terme de reste qu'il est crucial de savoir analyser. Cette analyse impose une bonne compréhension des relations de comparaison (notamment o et O). Le jury s'attend à ce que le lien entre l'existence d'un développement limité à un ordre n et l'existence d'une dérivée n -ième soit connu. On peut aussi montrer comment les formules de Taylor permettent d'établir le caractère développable en série entière (ou analytique) d'une fonction dont on contrôle les dérivées successives.

Pour les candidates et candidats solides, on peut mentionner des applications comme le lemme de Morse, l'étude locale au voisinage des points stationnaires pour les courbes et des points critiques pour la recherche d'extrema. On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités contrôlant les dérivées intermédiaires lorsque f et sa dérivée n -ième sont bornées, ou encore à l'analyse de méthodes d'intégration numérique.