

Leçon 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

On considère $n, m \in \mathbb{N}^*$, $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ des ouverts, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1 Différentiabilité

1.1 Fonctions différentiables

Définition 1. Soit $a \in U$, f est dite différentiable en a lorsqu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}_C(E, F)$ telle que $f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|)$ quand $h \rightarrow 0$. Lorsque φ existe elle est unique appelée différentielle de f en a et notée df_a .

Définition 2. Si f est différentiable en tout point de U , on dit que f est différentiable sur U et l'application $df : U \rightarrow \mathcal{L}_C(E, F)$; $a \mapsto df_a$ est appelée application différentielle de f . Si df est continue alors on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque 3. En dimension finie la condition de continuité de df_a est automatiquement vérifiée par linéarité. L'équivalence des normes permet aussi de montrer que l'existence et la valeur de df_a ne dépend des normes choisies.

Exemple 4. Si f linéaire continue alors $f(a+h) = f(a) + f(h)$ donc $df_a = f$ pour tout $a \in U$.

Proposition 5. Si f est différentiable en $a \in U$ alors f est continue en a .

Proposition 6. Soient $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ différentiables en $a \in U$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f + g$ et λf sont différentiables en a et $d(f + g)_a = df_a + dg_a$ et $d(\lambda f)_a = \lambda df_a$.

Proposition 7. Soit G un $\mathbb{R}$ -ev, $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$. Si f différentiable en $a \in U$ et g en $f(a) \in V$ alors $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en a et $d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$.

1.2 Dérivées directionnelles et partielles

Définition 8. On dit que f est dérivable en a selon $h \in E$ lorsque $\frac{\partial f}{\partial h}(a) := \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$ existe.

Proposition 9. Si f est différentiable en a alors admet une dérivée selon tout vecteur en a et $\frac{\partial f}{\partial h}(a) = df_a(h)$.

Remarque 10. La réciproque est fausse, la dérivabilité selon tout vecteur n'implique même pas la continuité. Par exemple avec $f : (x, y) \mapsto xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ et $f(0, 0) = 0$.

Définition 11. Soit $a \in U$, si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ f est dérivable en a selon e_i , on dit que f admet une dérivée partielle en a d'indice i notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Théorème 12. Si toutes les dérivées partielles de f sur U existent et si elles sont continues en $a \in U$ alors f est différentiable en a et $df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$.

Remarque 13. La réciproque est fausse par exemple $f : x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ et $f(0) = 0$ est différentiable en 0 mais f' n'est pas continue en 0.

Définition 14. On suppose que f admet une dérivée partielle en a pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On appelle matrice jacobienne de f en a la matrice $Jf_a = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket}$ avec $m = \dim(F)$ et $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Définition 15. Sous réserve d'existence, on peut définir par récurrence les dérivées partielles d'ordre p par

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_{p-1}} \dots \partial x_{i_1}} \right)$$

. Une fonction est dite de classe $\mathcal{C}^p$ lorsque toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre p existent et sont continues.

Théorème 16. (Schwarz) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ continues en $a \in U$. Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$.

Définition 17. Soit f une fonction réelle deux fois différentiable en a . On appelle matrice Hessienne de f en a la matrice $H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque 18. Grâce au théorème de Schwarz on sait que $H_f(a)$ est une matrice symétrique.

Définition 19. On suppose que toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de f existent et que f est réelle. On appelle laplacien de f l'application $\Delta f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$.

Exemple 20. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $g : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 ; (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. La fonction $F = f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et on a $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$.

2 Théorèmes fondamentaux

2.1 Accroissements finis

Théorème 21. Soient $a, b \in U$ tel que $[a, b] \subset U$. Si f continue sur $[a, b]$, différentiable en tout point de $]a, b[$ et si il existe $M > 0$ tel que pour tout $c \in]a, b[$ on ait $\|df_c\| \leq M$. Alors $\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\|$

Remarque 22. Si U on convexe, on peut généraliser ce résultat sur U tout entier.

Théorème 23. (Taylor-Lagrange) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^p$ et $x, h \in \mathbb{R}^n$ tels que $[x, x + h] \subset U$, alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$\begin{aligned} f(x + h) &= f(x) + \sum_{i_1 + \dots + i_n = 1} h_1^{i_1} \dots h_n^{i_n} \frac{\partial f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}(x) + \\ &\frac{1}{2!} \sum_{i_1 + \dots + i_n = 2} \frac{2!}{i_1! \dots i_n!} h_1^{i_1} \dots h_n^{i_n} \frac{\partial f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}(x) + \dots + \\ &\frac{1}{(p-1)!} \sum_{i_1 + \dots + i_n = p-1} \frac{(p-1)!}{i_1! \dots i_n!} h_1^{i_1} \dots h_n^{i_n} \frac{\partial f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}(x) + \\ &\frac{1}{p!} \sum_{i_1 + \dots + i_n = p-1} \frac{p!}{i_1! \dots i_n!} h_1^{i_1} \dots h_n^{i_n} \frac{\partial f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}(x + \theta h) \end{aligned}$$

2.2 Théorème d'inversion locale

Théorème 24. (Inversion locale) Soient E, F espaces de Banach et $U \subset E$ ouvert et $f : U \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que df_a soit un isomorphisme bicontinu de E dans F . Alors il existe un voisinage ouvert V de a et W de $f(a)$ tel que :

1. $f|_V$ est une bijection de $V \rightarrow W$.
2. L'application inverse $g : W \rightarrow V$ est continue,
3. g est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in V$, on a $dg_{f(x)} = df_x^{-1}$.

Corollaire 25. Sous les mêmes conditions que le théorème, f est une application ouverte, c'est à dire que pour tout ouvert $\Omega \subset U$ on a $f(\Omega)$ ouvert de F .

Théorème 26. (Inversion globale) Soient E, F espaces de Banach, $U \subset E$ ouvert et $f : U \rightarrow F$ injective de classe $\mathcal{C}^\infty$. On a l'équivalence suivante :

Pour tout $x \in U$, df_x est inversible et bicontinu si et seulement si $V = f(u)$ est ouvert de F et $f^{-1} : V \rightarrow U$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

OU VERSION AVEC $\mathcal{C}^1$ DIFFEQ

Définition 27. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Une application $f : E \rightarrow E$ est dite strictement monotone s'il existe $k > 0$ tel que : $\forall x, y \in E, \langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq k \|x - y\|^2$.

Proposition 28. Soit $f : E \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^1$, f est strictement monotone si et seulement si $\forall x, h \in E, \langle df_x(h), h \rangle \geq \|h\|^2$.

Proposition 29. Si $f : E \rightarrow E$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone alors f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de E sur E .

2.3 Théorème des fonctions implicites

Théorème 30. (Fonctions implicites) Soient $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $(a, b) \in W$ et $g : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(a, b) = 0$. On suppose que la différentielle en b de $y \mapsto g(a, y)$ est un isomorphisme. Alors il existe un voisinage ouvert $W_a \times W_b$ de (a, b) dans W et $\varphi : W_a \rightarrow W_b$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $(x, y) \in W_a \times W_b$ on ait $g(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$.

Exemple 31. Soit $f : (x, y) \mapsto \sin(y) + xy^4 + x^2$, alors il existe V et V' voisinages ouverts de 0 et $\varphi : V \rightarrow V'$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $x \in V$, $\varphi(x)$ est l'unique solution de $f(x, y) = 0$ avec $y \in V'$.

3 Application à la recherche d'extrema

Définition 32. On dit que $a \in U$ est un point critique de f lorsque f différentiable en a et $df_a = 0$.

Proposition 33. Si f différentiable en $a \in U$ et a extrema relatif de f alors a est un point critique.

Exemple 34. Pour la fonction réelle $x \mapsto x^3$ on observe que 0 est point critique mais pas extremum.

Théorème 35. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $df_a = 0$ alors :

1. Si f admet un maximum (resp minimum) relatif en a , alors $H_f(a)$ est positive (resp négative).
2. Si $H_f(a)$ est définie positive (resp définie négative) alors f admet un maximum (resp minimum) relatif en a .

Théorème 36. (Extremas liés) Soient $f, g_1, \dots, g_r$ des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur un ouvert $U \subset E$ et $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f|_\Gamma$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les $dg_{1,a}, \dots, dg_{r,a}$ sont linéairement indépendantes, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ (uniques et appelés multiplicateurs de Lagrange) tels que $df_a = \sum_{k=1}^r \lambda_k dg_{k,a}$.

Exemple 37. On peut retrouver l'inégalité arithmético-géométrique à partir de ce théorème.

4 Annexe

FAIRE DES DESSINS!

DEV 1 : Théorème d'inversion locale 24

DEV 2 : Fonctions strictement monotones 25, 28 et 29

Références

- [GOU20] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Analyse - 3e édition. ELLIPSES, 2020.
- [ROU03] François ROUVIERE : Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation. CASSINI, 2003.

RAPPORT DU JURY :

L'idée de départ de cette leçon est qu'une fonction suffisamment régulière se comporte localement comme une application linéaire. De nombreuses différentielles usuelles (notamment issues de l'algèbre linéaire) peuvent ainsi être obtenues en calculant directement un développement limité. Des exemples significatifs en dimension 2 et 3 pourront venir illustrer la différence fondamentale avec la dimension 1. Les dérivées partielles (lorsqu'elles existent) pourront clarifier l'expression de nombreuses différentielles ainsi que la règle de la chaîne. Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser la notion de différentielle seconde pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, à la différentielle de l'exponentielle matricielle, ainsi qu'aux points où celle-ci est un difféomorphisme local, aux fonctions harmoniques et à leurs propriétés élémentaires, à la caractérisation des fonctions holomorphes et son interprétation géométrique. Pour ce qui concerne les applications, de nombreux thèmes relatifs aux leçons 214 ou 219 sont ici appropriés.