

Leçon 214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

On considère E, F des espaces de Banach et $U \subset E$ un ouvert.

1 Théorème d'inversion locale

1.1 Construction du théorème

Définition 1. On dit qu'une fonction $f : U \rightarrow F$ est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de U sur $V = f(U)$ lorsque f et f^{-1} sont bijectives et de classes $\mathcal{C}^k$.

Proposition 2. Dans le cas où $F = \mathbb{R}^n$ et $E = \mathbb{R}^m$, soit $f : U \rightarrow F$ un difféomorphisme. Alors pour tout $x \in U$ en posant $y = f(x)$ on a $d(f^{-1})_y \circ df_x = Id$ et $n = m$.

Exemple 3. L'application $x \mapsto x^3$ est un homéomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ mais pas difféomorphisme.

Théorème 4. (Point fixe de Picard) Soit (E, d) un espace complet et $f : E \rightarrow E$ telle qu'il existe $0 < k < 1$ tel que pour tout $x, y \in E$, $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$. Alors f possède un unique point fixe a et la suite récurrente définie par $x_0 \in E$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a quel que soit x_0 .

Théorème 5. (Inversion locale) Soient E, F espaces de Banach et $U \subset E$ ouvert et $f : U \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que df_a soit un isomorphisme bicontinu de E dans F . Alors il existe un voisinage ouvert V de a et W de $f(a)$ tel que :

1. $f|_V$ est une bijection de $V \rightarrow W$.
2. L'application inverse $g : W \rightarrow V$ est continue,
3. g est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in V$, on a $dg_{f(x)} = df_x^{-1}$.

Remarque 6. Il existe la version $\mathcal{C}^k$ de ce théorème.

Exemple 7. L'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 - y^2, xy)$ est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

1.2 Conséquences

Corollaire 8. Sous les mêmes conditions que le théorème, f est une application ouverte, c'est à dire que pour tout ouvert $\Omega \subset U$ on a $f(\Omega)$ ouvert de F .

Corollaire 9. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^K$. S'il existe $a \in U$ tel que df_a soit inversible (ie $Jac(f) \neq 0$), alors il existe un voisinage V de a et un voisinage W de $f(a)$ tel que $f|_V : V \rightarrow W$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme et $d(f|_V^{-1})_{f(x)} = df_x^{-1}$ pour tout $x \in V$.

Théorème 10. Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}^n$. Les relations $u_1 = f_1(x_1, \dots, x_n); \dots; u_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$ définissent un changement de coordonnées sur un voisinage de a si et seulement si le jacobien n'est pas nul. C'est-à-dire si les différentielles $df_1(a), \dots, df_n(a)$ sont des formes linéaires indépendantes.

Exemple 11. En utilisant le changement de variable en coordonnées polaire on a $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Exemple 12. Soit $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. Alors $V = \varphi(U)$ est mesurable et une application $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable si et seulement si $|J_\varphi(a)| \cdot f \circ \varphi$ est intégrable. Dans ce cas on a $\int_V f(x) dx = \int_U |J_\varphi(a)| \cdot f(\varphi(y)) dy$.

Corollaire 13. Soient $f_1, \dots, f_p$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}^n$. On peut les compléter par des fonctions $f_{p+1}, \dots, f_n$ en un changement de coordonnées au voisinage de a si et seulement si les différentielles $df_1(a), \dots, df_p(a)$ sont des formes linéaires linéairement indépendantes.

Théorème 14. (Inversion globale) Soient E, F espaces de Banach, $U \subset E$ ouvert et $f : U \rightarrow F$ injective de classe $\mathcal{C}^\infty$. On a l'équivalence suivante :

Pour tout $x \in U$, df_x est inversible et bicontinu si et seulement si $V = f(U)$ est ouvert de F et $f^{-1} : V \rightarrow U$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

1.3 Applications

Théorème 15. (Du rang constant) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$, on suppose que le rang de la matrice jacobienne $df(x)$ est constant sur U égal à r . Alors il existe un changement de coordonnées local au voisinage de a et de $f(a)$ qui transforme f en une application $A : (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (X_1, \dots, X_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$ de rang r .

Définition 16. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Une application $f : E \rightarrow E$ est dite strictement monotone s'il existe $k > 0$ tel que : $\forall x, y \in E, \langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq k \|x - y\|^2$.

Proposition 17. Soit $f : E \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^1$, f est strictement monotone si et seulement si $\forall x, h \in E, \langle df_x(h), h \rangle \geq \|h\|^2$.

Proposition 18. Si $f : E \rightarrow E$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone alors f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de E sur E .

2 Théorème des fonctions implicites

2.1 Énoncés

Définition 19. Soit $a \in U$, f est dite différentiable en a lorsqu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}_C(E, F)$ telle que $f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|)$ quand $h \rightarrow 0$. Lorsque φ existe elle est unique appelée différentielle de f en a et notée df_a .

Si f est différentiable en tout point de U , on dit que f est différentiable sur U et l'application $df : U \rightarrow \mathcal{L}_C(E, F)$; $a \mapsto df_a$ est appelée application différentielle de f . Si df est continue alors on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 20. (Fonctions implicites) Soient $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $(a, b) \in W$ et $g : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(a, b) = 0$. On suppose que la différentielle en b de $y \mapsto g(a, y)$ est un isomorphisme. Alors il existe un voisinage ouvert $W_a \times W_b$ de (a, b) dans W et $\varphi : W_a \rightarrow W_b$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $(x, y) \in W_a \times W_b$ on ait $g(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$.

Remarque 21. La signification de ce théorème est que la surface définie implicitement par l'équation $f(x, y) = 0$ peut être vue localement comme le graphe d'une fonction φ .

Exemple 22. Soit $f : (x, y) \mapsto \sin(y) + xy^4 + x^2$, alors il existe V et V' voisinages ouverts de 0 et $\varphi : V \rightarrow V'$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $x \in V$, $\varphi(x)$ est l'unique solution de $f(x, y) = 0$ avec $y \in V'$.

2.2 Applications

Exemple 23. (Folium de Descartes) L'ensemble des points $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$ peut être vu en tout point $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (2^{2/3}, 2^{1/3})\}$ comme le graphe d'une fonction φ telle que $\varphi'(a) = \frac{a^2 - b}{a - b^2}$.

Définition 24. On dit que $a \in U$ est un point critique de f lorsque f est différentiable en a et $df_a = 0$.

Proposition 25. Si f est différentiable en $a \in U$ et a est un extremum relatif de f alors a est un point critique.

Exemple 26. Pour la fonction réelle $x \mapsto x^3$ on observe que 0 est point critique mais pas extremum.

Théorème 27. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $df_a = 0$ alors :

1. Si f admet un maximum (resp minimum) relatif en a , alors $H_f(a)$ est positive (resp négative).
2. Si $H_f(a)$ est définie positive (resp définie négative) alors f admet un maximum (resp minimum) relatif en a .

Théorème 28. (Extremas liés) Soient $f, g_1, \dots, g_r$ des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur un ouvert $U \subset E$ et $\Gamma = \{x \in U | g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f|_\Gamma$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les $dg_{1,a}, \dots, dg_{r,a}$ sont linéairement indépendantes, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ (uniques et appelés multiplicateurs de Lagrange) tels que $df_a = \sum_{k=1}^r \lambda_k dg_{k,a}$.

Exemple 29. Soit $g : (x, y) \mapsto x^3 - y^2$ et $f : (x, y) \mapsto x + y^2$, on cherche à minimiser f sous la contrainte $g(x, y) = 0$. Alors le minimum (global) de f sous cette contrainte est atteint en $(0, 0)$, la différentielle de g en $(0, 0)$ est nulle et la relation finale n'est pas vraie.

Exemple 30. (Inégalité arithmético-géométrique) Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ on a $(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

Exemple 31. (Inégalité d'Hadamard) Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a $\det(x_1, \dots, x_n) \leq \|x_1\| \dots \|x_n\|$ avec égalité si et seulement si c'est une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 32. Soit $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ une racine simple de P_0 . Alors il existe une application φ de classe C^∞ définie sur un voisinage U de P_0 dans $\mathbb{R}^n[X]$ à valeur dans un voisinage V de x_0 telle que pour tout $P \in U$, pour tout $x \in U$ on ait $x = \varphi(P) \iff P(x) = 0$.

3 Annexe

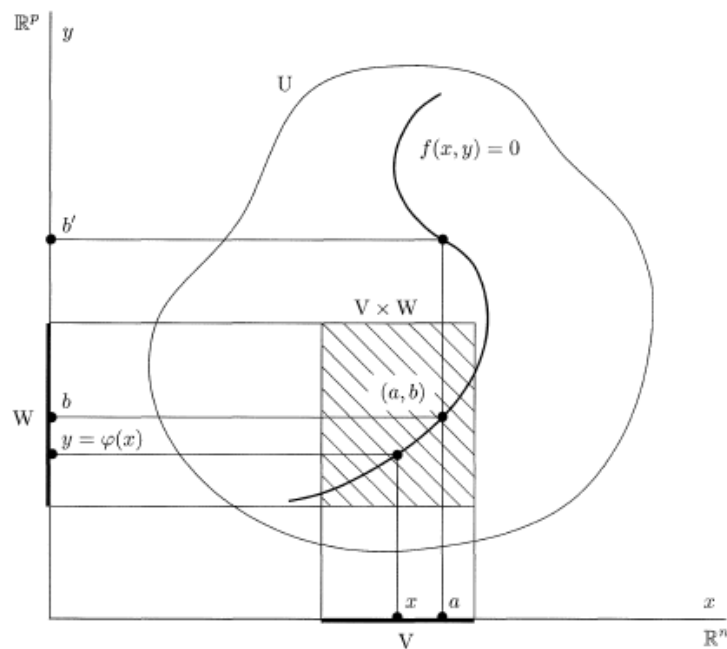


Fig. 88. Le théorème des fonctions implicites.

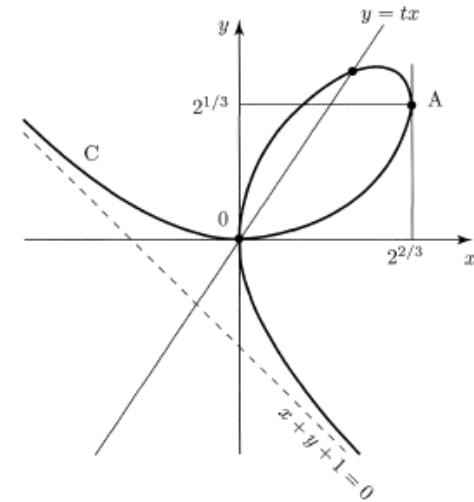


Fig. 105. Le folium de Descartes $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

DEV 1 : Théorème d'inversion locale 5
DEV 2 : Fonctions strictement monotones 8, 17 et 18

Références

- [GOU20] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Analyse - 3e édition. ELLIPSES, 2020.
- [GP05] Vincent BECK GABRIEL PEYRE, Jérôme MALICK : Objectif agrégation. HK, 2005.
- [ROU03] François ROUVIERE : Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation. CASSINI, 2003.

RAPPORT DU JURY :

Les deux théorèmes fondamentaux auxquels cette leçon est consacrée offrent une belle utilisation de la complétude, qu'il conviendra d'évoquer. La démonstration de l'un de ces deux théorèmes peut parfaitement faire l'objet d'un des deux développements. On pourra par exemple mettre en pratique, sur des exemples bien choisis, le théorème des fonctions implicites au moins dans le cas de deux variables réelles, pour enrichir le plan avec profit. Des applications significatives aussi bien en analyse qu'en géométrie sont at-

tendues : problèmes d'optimisation sous contraintes (inégalité de Hölder, inégalité d'Hadamard, etc), régularité des racines d'un polynôme en fonction des coefficients, etc. La méthode des multiplicateurs de Lagrange a bien évidemment toute sa place dans cette leçon, à condition qu'elle soit illustrée par des exemples. L'interprétation de l'énoncé en termes d'espace tangent est visuellement éclairante et permet d'éviter les éventuelles confusions résultant de raisonnements purement matriciels.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à l'étude locale d'applications suffisamment régulières (submersions, immersions, théorème du rang constant, lemme de Morse), au lemme de Sard, ainsi qu'aux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.