

Leçon 213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

1 Généralités

1.1 Espaces pré-Hilbertiens

Définition 1. On appelle **produit scalaire** sur E , toute application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ telle que :

1. Pour tout $y \in E$, l'application $\langle \cdot, y \rangle : E \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire,
2. Pour tout $x \in E$, $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$,
3. Pour tout $x \in E$, $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$,
4. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R} : \forall x, y \in E \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (Propriété de symétrie).
5. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C} : \forall x, y \in E \langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ (Propriété d'antisymétrie).

Le couple E muni d'un produit scalaire sur E est appelé espace préhilbertien réel (ou complexe).

A présent considère $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de préhilbertien

Théorème 2. (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Pour tout $x, y \in E$ on a : $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

Corollaire 3. Dans E , la relation $\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{1/2}$ définit une norme sur E .

Corollaire 4. Pour tout $y \in E$, la forme linéaire $\phi_y = \langle \cdot, y \rangle$ est continue et sa norme dans E^* est égale à $\|y\|$

Proposition 5. (Cas d'égalité) Soient x et y des éléments de E un espace préhilbertien. Alors $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$ si et seulement si x et y sont liés.

Proposition 6. (Identité du parallélogramme) Soit E un espace préhilbertien et $x, y \in E$, alors $\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Définition 7. Deux éléments x et y dans un espace préhilbertien E sont **orthogonaux** lorsque $\langle x, y \rangle = 0$. On note alors $x \perp y$. L'orthogonal d'une partie $A \subseteq E$ est l'ensemble des éléments orthogonaux à tous les éléments de A et est noté $A^\perp$. Avec les notations précédentes, on a $A^\perp = \bigcap_{y \in A} \text{Ker}(\phi_y)$, ainsi $A^\perp$ est un sous espace vectoriel fermé de E .

Théorème 8. (Pythagore) Soit E un espace préhilbertien et $x, y \in E$ avec $x \perp y$, alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Ce résultat s'étend par récurrence à un nombre fini de vecteur 2 à 2 orthogonaux.

1.2 Espaces de Hilbert

Définition 9. Un espace préhilbertien complet pour la norme définie par son produit scalaire est appelé **espace de Hilbert**.

A présent considère $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert

Exemple 10. Tout espace pré-hilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.

Proposition 11. L'espace $(L^2(X, \mathcal{A}, \mu), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ des fonctions à valeur dans $\mathbb{K}$ de carré intégrable, avec $\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$ est un espace de Hilbert.

2 Théorèmes de projection et conséquences

2.1 Projection sur un convexe fermé

Théorème 12. (*Projection sur un convexe fermé*) Soit C une partie fermée, convexe et non vide de E . Alors pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in C$ tel que : $\|x - y\| = d(x, C)$. Ce point est appelé **projeté de x sur C** et noté $P_C(x)$, et possède la propriété caractéristique suivante : $\forall z \in C, \operatorname{Re}(\langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle) \leq 0$

Corollaire 13. Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent on a : $\forall x_1, x_2 \in E, \|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$

Proposition 14. Soit F un sous espace vectoriel fermé de E . Alors P_F est un opérateur linéaire de E dans F . Si $x \in E$, alors $P_F(x)$ est l'unique élément $y \in F$ tel que : $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

Corollaire 15. Pour tout sous espace vectoriel fermé F de E , on a : $E = F \oplus F^\perp$

Corollaire 16. Soit F un sous espace vectoriel de E , alors $\overline{F} = F^{\perp\perp}$

2.2 Représentation de Riesz

Théorème 17. (*de représentation de Riesz*) L'application de E dans E^* définie par $\Phi : y \mapsto \phi_y = \langle \cdot, y \rangle$ est une isométrie surjective. C'est à dire, pour toute forme linéaire continue ϕ sur E , il existe un unique $y \in E$ tel que $\forall x \in E, \phi(x) = \langle x, y \rangle$, de plus $\|\phi\| = \|y\|$. Cette application Φ est de plus antilinéaire sur $\mathbb{C}$.

Corollaire 18. Tout espace de Hilbert est réflexif. C'est à dire que l'injection canonique dans son bidual $J : x \mapsto J(x)(\varphi) = \varphi(x)$ est surjective.

Définition 19. Pour tout $T \in \mathcal{L}(E)$ il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(E)$ appelé adjoint de T tel que $\forall x, y \in E, \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$. De plus il vérifie $\|T^*\| = \|T\|$.

Proposition 20. L'application $T \mapsto T^*$ est une application linéaire dans le cas réel (antilinéaire dans le cas complexe). Elle vérifie $T^{**} = T$ et $(TS)^* = S^*T^*$.

3 Bases Hilbertiennes

Définition 21. On appelle base hilbertienne de E toute famille $(e_i)_{i \in I}$ de E orthonormale (orthogonale et pour tout $i \in I, \|e_i\| = 1$) et telle que $(e_i)_{i \in I}$ est totale dans E c'est-à-dire $\overline{\operatorname{Vect}(e_i)} = E$.

Exemple 22. Dans l'espace de Hilbert ℓ^2 la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $e_n = \delta_{n,k}$ est une base hilbertienne de ℓ^2 .

Proposition 23. (*Bessel*) Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale de E , pour tout $x \in E$ on a $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Théorème 24. (*Bessel-Parseval*) Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale de E , les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de E ,
2. $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$,
3. $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$.

Théorème 25. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base hilbertienne de E , alors pour tout $x \in E$ on a $x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$.

Proposition 26. (*Orthonormalisation de Schmidt*) Soit $N \in \mathbb{N}$ et $(f_n)_{1 \leq n \leq N}$ une famille libre de E . Il existe une famille orthonormale $(e_i)_{1 \leq i \leq N}$ telle que pour tout entier $n < N$ on ait $\operatorname{Vect}(e_0, \dots, e_n) = \operatorname{Vect}(f_0, \dots, f_n)$.

Une telle famille se construit par récurrence en posant $e_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|}$ puis pour $0 \leq n \leq N - 1$ en posant $x_{n+1} = f_{n+1} - P_n(f_{n+1})$ où P_n est le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Vect}(f_0, \dots, f_n)$ et $e_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{\|x_{n+1}\|}$.

4 Espace L^2 et polynômes orthogonaux

On considère $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 27. La forme bilinéaire sur L^2 définie par $\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} d\mu$ est un produit scalaire qui confère à L^2 une structure d'espace pré-hilbertien.

Remarque 28. La norme associée à ce produit scalaire noté $\|\cdot\|_2$ est une norme de L^2 .

Théorème 29. (*Riesz-Fisher*) Les espaces L^p sont complets.

Corollaire 30. *En particulier L^2 est un Hilbert.*

Définition 31. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x \mapsto \rho(x)x^n$ intégrable.

Théorème 32. *Il existe une unique famille $(P_n)_n$ de polynômes unitaires orthogonaux 2 à 2 tels que $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exemple 33. Les polynômes de Hermite définis pour $\rho(x) = \exp(-x^2)$ sont $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} \exp(x^2) \frac{\partial}{\partial x^n} (\exp(-x^2))$.

Lemme 34. *On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ les $x \mapsto x^n$ sont intégrables pour ρ et soit $(P_n)_n$ famille des polygones orthogonaux associés à ρ . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x \mapsto x^n \in L^2$. En particulier l'algorithme de Gram-Schmidt a du sens et les $(P_n)_n$ sont bien définis.*

Application 35. Soit $(P_n)_n$ la suite des polynômes orthogonaux associés à ρ et on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < +\infty$. Alors $(P_n)_n$ est une base hilbertienne de L^2 pour la norme $\|\cdot\|_2$.

5 Fonctions strictement monotones

Définition 36. Une fonction $f : E \rightarrow E$ est dite strictement monotone lorsqu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x, y \in E$ on a $\langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq k \|x - y\|^2$.

Proposition 37. *Soit $f \in C^1(E, E)$ alors f est strictement monotone si et seulement si pour tout $x \in E$, pour tout $h \in E$ on a $\langle df_x(h), h \rangle \geq k \|h\|^2$.*

Proposition 38. *Si $f \in C^1(E, E)$ est strictement monotone, alors f est un C^1 difféomorphisme.*

DEV 1 : Projection convexe fermé 12,13 et 17
DEV 2 : Fonction strictement monotone 37 et 38

Références

[FH99] Gilles LACOMBE FRANCIS HIRSH : Éléments d'analyse fonctionnelle. Dunod, 1999.

[GOU20] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Analyse - 3e édition. ELLIPSES, 2020.

[HAS18] Nawfal El Hage HASSAN : Topologie générale et espaces normés. Dunod, 2018.

RAPPORT DU JURY :

La théorie des espaces de Hilbert est riche. Les propriétés algébriques fondamentales, l'utilisation de la complétude et la projection orthogonale sur les convexes fermés (en particulier les sous-espaces vectoriels fermés) doivent être bien comprises. L'analyse de Fourier, sur le cercle où la droite réelle, est évidemment une illustration fondamentale des résultats de cette leçon. Le jury a noté que la théorie L^2 des séries de Fourier n'était pas souvent maîtrisée. Les concepts de famille orthonormée et de base hilbertienne constituent une source abondante d'applications. Le fait que les polynômes constituent une base hilbertienne de l'espace des fonctions de carré intégrable relativement à certains poids est présenté quasi systématiquement en développement. Peut-être faudrait-il songer à trouver d'autres sources d'inspiration, d'autant que la preuve et en déduire une base hilbertienne de L^2 ne sont pas parfaitement compris.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux propriétés spectrales des opérateurs autoadjoints compacts d'un espace de Hilbert, à la minimisation de fonctionnelles convexes et coercives sur un espace de Hilbert, ou encore au théorème de Paley-Wiener qui caractérise les fonctions de L^2 dont la transformée de Fourier est à support compact, ou encore au théorème d'échantillonnage de Shannon.