

Leçon 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

1 Approximation polynomiale

1.1 Interpolation [DEM16]

Définition 1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. Posons pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ la fonction $L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$. On appelle polynôme interpolateur de Lagrange le polynôme défini par $p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$.

Théorème 2. Le polynôme interpolateur de Lagrange est l'unique solution du problème : existe-t-il un polynôme de degré au plus n valant $f(x_i)$ pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Lemme 3. Soit g une fonction p fois dérivable sur $[a, b]$, on suppose qu'il existe $c_0 < c_1 < \dots < c_p \in [a, b]$ annulant g . Alors il existe $\xi \in]c_0, c_p[$ tel que $g^{(p)}(\xi) = 0$.

Théorème 4. On suppose f est $n + 1$ fois dérivable sur $[a, b]$ et on note $\pi_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$. Alors pour tout $x \in [a, b]$ il existe $\xi_x \in]\min(x, x_i) \max(x, x_i)[$ tel que $f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi_x)$

Corollaire 5. On approxime l'erreur d'interpolation par

$$\|f - p_n\| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\| \|\pi_{n+1}\|$$

1.2 Approximation locale [GOU20]

Théorème 6. (Taylor-Lagrange) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et dérivable $n + 1$ fois sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Corollaire 7. Si $f : [a, b] \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^n$ et $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$ avec $f^{(n+1)}$ majorée par M sur $]a, b[$ alors on a :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right\| \leq \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Théorème 8. (Taylor-Young) Si $f : [a, b] \rightarrow E$ où E complet de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et dérivable $n + 1$ fois sur $]a, b[$, alors lorsque $h \rightarrow 0$ on a :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k f^{(k)}(a)}{k!} + \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(a)}{n!} + o(h^{n+1})$$

Exemple 9. On a les inégalités suivantes :

1. $\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3},$
2. $\forall x \geq 0, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

1.3 Fonctions continues sur un compact [FH99]

Théorème 10. (Heine) Si $f : E \rightarrow F$ continue sur E compact alors f est uniformément continue sur E .

Théorème 11. (Dini 1) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle dans $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue alors la convergence est uniforme.

Théorème 12. (Dini 2) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions croissantes et continues de $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle dans $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ alors la convergence est uniforme.

Exemple 13. Sur $[-1, 1]$ la suite de $\mathbb{R}[X]$ définie par $P_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n(x)^2)$ vérifie $0 \leq p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq |x|$ et converge uniformément vers $|x|$ par Dini.

Dans cette partie X est un espace compact.

Définition 14. Une partie $H \subset \mathcal{C}(X)$ est dite séparante lorsque pour tout $(x, y) \in X^2$ avec $x \neq y$, il existe $h \in H$ tel que $h(x) \neq h(y)$.

Définition 15. Une partie $H \subset \mathcal{C}(X)$ est dite réticulée lorsque pour tout $(f, g) \in H^2$, les fonctions $\sup(f, g) : x \mapsto \max(f(x), g(x))$ et $\inf(f, g) : x \mapsto \min(f(x), g(x))$ sont des éléments de H .

Lemme 16. On suppose que X possède au moins 2 éléments. Soit $H \subset \mathcal{C}(X)$ vérifiant les conditions :

1. H est réticulée,
2. Soient $x, y \in X$ avec $x \neq y$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe $u \in H$ tel que $u(x) = \alpha$ et $u(y) = \beta$.

Alors H est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Théorème 17. Si H est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(X)$ réticulé, séparant et contenant les fonctions constantes, alors H est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Exemple 18. L'ensemble des fonction lipschitzienne de X dans $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Théorème 19. (Stone-Weierstrass réel) Toute sous algèbre de $\mathcal{C}(X)$ séparante et contenant les constantes est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Exemple 20. $X \subset \mathbb{R}^d$ compact et $H = \{x \mapsto P(x), P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]\}$ est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Remarque 21. Le cas où $d = 1$ et $X = [a, b]$ est connu comme le théorème de Weierstrass.

Remarque 22. Pour la version complexe du théorème il faut ajouter l'hypothèse de contenir la conjugaison aux précédentes pour avoir la densité.

2 Espaces L^p [AMR08]

2.1 Convolution

Proposition 23. Pour tout $p \in [1, \infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

Proposition 24. Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, pour tout $p \in [1, \infty[$, l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans L^p .

Définition 25. Deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont convolables lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable. On définit alors le produit de convolution de f par g par : $\forall x \in \mathbb{R}, f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$.

Définition 26. Une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^1(\mathbb{R}^d)$ est une approximation de l'unité lorsqu'elle vérifie :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n d\lambda_d = 1$,
2. $\sup_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha_n| d\lambda_d < \infty$,
3. Pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > \varepsilon} |\alpha_n| d\lambda_d = 0$.

Exemple 27. — Noyau de Laplace sur $\mathbb{R}$: $\forall t > 0, \alpha_t(x) = \frac{1}{2t} e^{-|x|/t}$,

— Noyau de Cauchy sur $\mathbb{R}$: $\forall t > 0, \alpha_t(x) = \frac{t}{\pi(t^2 + x^2)}$,

— Noyau de Gauss sur $\mathbb{R}^d$: $\forall t > 0, \alpha_t(x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^d} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$.

Théorème 28. Soit $(\alpha_n)_n$ une approximation de l'unité. Soit $p \in [1, \infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors ; $\forall n \geq 1, f * \alpha_n \in L^p(\mathbb{R})$ et $f * \alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_p} f$.

Définition 29. Une suite $(\alpha_n)_n$ est dite régularisante lorsque c'est une approximation de l'unité et pour tout $n \geq 1, \alpha_n \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 30. L'espace $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{C}_K(\mathbb{R}^d)$ et dense dans tous les $L^p(\mathbb{R}^d)$.

2.2 Application aux probabilités[HQ20]

Définition 31. Soit X une variable aléatoire réelle, on appelle fonction caractéristique de X la fonction $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; $t \mapsto \mathbb{E}[e^{itX}]$.

Définition 32. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles et X une var. On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X noté $(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ lorsque pour tout $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X)]$.

Théorème 33. On a l'équivalence : $(X_n)_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \mathbb{E}[f(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X)]$.

Théorème 34. (Lévy) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles, on a l'équivalence : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \varphi_{X_n} \xrightarrow{cvs} \varphi_X$.

Théorème 35. (Central Limite) Soit $(X_n)_n$ suite de variables aléatoires qui admettent un moment d'ordre 2, $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ alors $\frac{S_n - mn}{\sqrt{ns}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1)$

Application 36. On a la formule de Stirling $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

3 Séries de Fourier

Définition 37. Soit $f \in L_{2\pi}^1$ et $n \in \mathbb{Z}$, on appelle n -ième coefficient de Fourier de f , le nombre complexe défini par $c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-inx) dx$.

Remarque 38. Si $f \in L_{2\pi}^2$ alors $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$.

Définition 39. Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on appelle série de Fourier de f , la série $S(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n(t) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n(f) e_n(t) + c_{-n}(f) e_{-n}(t))$

Définition 40. Pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ on note $\sigma_N(f) := \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k(f)$ la N -ième somme de Cesàro de la série de Fourier de F . On dit que la série de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ converge au sens de Cesàro au point x lorsque $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(f)(x)$ existe.

Définition 41. La fonction $D_N := \sum_{k=-N}^N e_k$ avec $e_n(x) = \exp(inx)$ est le noyau de Dirichlet d'ordre N .

La fonction $K_N := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} D_j$ est appelé noyau de Fejér d'ordre N .

Proposition 42. 1. On a $K_N = \sum_{n=-N}^n \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n$ et $\sigma_N(f) = f * \sum_{n=-N}^n \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n(f) e_n$.

2. La suite $(K_N)_{N \geq 1}$ est une approximation de l'unité dans $L_{2\pi}^1$.

Théorème 43. (Fejér) Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ alors :

1. On a $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$
2. On a $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\sigma_N(f) - f\|_\infty = 0$

Théorème 44. Si $f \in L_{2\pi}^p$ avec $p \in [1, \infty[$ alors :

1. On a : $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$
2. On a $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$

Corollaire 45. (Weierstrass trigonométrique) Le sous espace vectoriel des polynômes trigonométriques est dense dans $(\mathcal{C}_{\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ et dans $(L_{2\pi}^p, \|\cdot\|_p)$ pour tout $p \in [1, \infty[$.

Remarque 46. Ce théorème nous donne que $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L_{2\pi}^2$.

DEV 1 : Stone Weierstrass 16,17 et 19

DEV 2 : Levy et TCL 33, 34 et 35

DEV 3 : Féjér 43

Références

- [AMR08] Mohamed EL AMRANI : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. ELLIPSES, 2008.
- [DEM16] Jean-Pierre DEMAILLY : Analyse numérique et équations différentielles. Collection Grenoble Science, 2016.
- [FH99] Gilles LACOMBE FRANCIS HIRSH : Éléments d'analyse fonctionnelle. Dunod, 1999.
- [GOU20] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Analyse - 3e édition. ELLIPSES, 2020.

[HQ20] Claude ZUILY HERVÉ QUEFFELEC : Analyse pour l'agrégation - Agrégation/Master Mathématiques. Dunod, 2020.

RAPPORT DU JURY :

Le programme offre aux candidats plusieurs pistes très riches pour nourrir cette leçon : l'approximation uniforme par des polynômes algébriques ou trigonométriques, la régularisation par convolution. Mais on pourra également penser à l'approximation des fonctions intégrables sur la droite réelle par des fonctions continues à support compact. Les séries de Fourier s'intègrent parfaitement à cette leçon, mais le jury a constaté lors de la session 2022 que la théorie L^2 était très rarement abordée par les candidats. Dans la même thématique, on peut citer le théorème de Fejér (dans ses versions L^p ou $\mathbb{C}(T)$) et ses applications.

Voici enfin quelques pistes à réserver aux candidats solides : le théorème de Runge, le théorème taubérien de Littlewood, l'unicité de la meilleure approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d , les liens entre la régularité et la qualité de l'approximation par des polynômes (algébriques ou trigonométriques) voire des fonctions rationnelles, l'approximation uniforme par des fonctions lipschitziennes.