

Leçon 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples et applications

Dans cette leçon on considère $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et E désignera un $\mathbb{K}$ espace vectoriel

1 Espaces vectoriels normés [Has18]

1.1 Généralités

Définition 1. Une norme sur E est une application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

1. $\forall x \in E \setminus \{0\} \quad \|x\| \neq 0$,
2. $\forall x \in E \setminus \{0\}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
3. $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ est appelé espace vectoriel normé (EVN).

Proposition 2. Pour tout $x, y \in E$, on a $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Pour tout n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ on a $\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|$.

Définition 3. On pose l'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+, (x, y) \mapsto \|x - y\|$, c'est une distance pour E que l'on nomme distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

Définition 4. Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont dites équivalentes lorsqu'il existe $a, b > 0$ tels que pour tout $x \in E$ on ait $a \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b \|x\|_1$.

Exemple 5.

Proposition 6. Si $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ sont des EVN alors $(E_1 \times \dots \times E_n, \|\cdot\|_\infty)$ est un EVN pour la norme $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} \|x_i\|_i$.

1.2 Applications linéaires continues

Dans cette partie on considère $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.

Définition 7. Une application $f : E \rightarrow F$ est dite linéaire lorsque pour tout $x, y \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ elle vérifie $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Théorème 8. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, on a les équivalences suivantes :

1. f est continue sur E ,
2. f est continue en 0,
3. f est bornée sur la boule unité fermée $B_f(0, 1)$ de E ,
4. f est bornée sur la sphère unité $S(0, 1)$ de E ,
5. Il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$,
6. f est lipschitzienne,
7. f est uniformément continue.

Remarque 9. De même pour une application multilinéaire $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ est continue si et seulement si il existe $M > 0$ tel que $\|f(x_1, \dots, x_n)\| \leq M \|x_1\|_1 \dots \|x_n\|_n$.

Définition 10. L'ensemble $\mathcal{L}_C(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F est un EVN pour la norme définie par :

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Proposition 11. Pour tout $f \in \mathcal{L}_C(E, F)$ et tout $x \in E$ on a $\|f(x)\|_F \leq \|f\| \|x\|_E$.

Théorème 12. Soient $(G, \|\cdot\|_G)$ un EVN, $f \in \mathcal{L}_C(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_C(F, G)$. Alors on a $g \circ f \in \mathcal{L}_C(E, G)$ et $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$.

Théorème 13. Soit $f \in \mathcal{L}_C(E, F)$ on a l'équivalence suivante : f est un homéomorphisme $\iff \exists \alpha, \beta > 0, \forall x \in E, \alpha \|x\|_E \leq \|f(x)\|_F \leq \beta \|x\|_E$.

1.3 Cas de la dimension finie

Théorème 14. Dans un EVN de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Lemme 15. Un EVN de dimension finie non nul possède une infinité de normes.

Proposition 16. Toute application linéaire d'un EVN de dimension finie vers un EVN quelconque est continue.

Corollaire 17. Tout EVN de dimension finie est complet.

Théorème 18. (Riesz) On a l'équivalence suivante : E est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée $B_f(0, 1)$ est compacte.

Corollaire 19. Soit E un EVN de dimension finie et $A \subset E$ alors A est compact si et seulement si A est fermé borné.

Exemple 20. Pour $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\left\| \sum_{i=1}^n a_i X^i \right\|$, l'application $f : E \rightarrow E, P \mapsto P'$ n'est pas continue car $\|f(X^n)\| = n$ mais $\|X^n\| = 1$

2 Espaces de Banach

2.1 Généralités

Définition 21. Un espace de Banach est un EVN complet pour la distance associée à sa norme.

Exemple 22. Les espaces $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ et $(B(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions bornées d'un espace X vers $\mathbb{K}$ sont de Banach. Par contre l'espace $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ n'est pas de Banach.

Proposition 23. Si $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach alors l'espace $(\mathcal{L}_C(E, F), \|\cdot\|)$ est de Banach quel que soit l'EVN de départ $(E, \|\cdot\|_E)$.

Théorème 24. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un EVN, $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach, $H \subset E$ un sous espace vectoriel dense dans E et $f \in \mathcal{L}_C(H, F)$. Alors il existe une unique application $g \in \mathcal{L}_C(E, F)$ prolongeant f . De plus $\|f\| = \|g\|$.

Proposition 25. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et $u \in \mathcal{L}_C(E)$ tel que $\|u\| < 1$. Alors $Id - u$ est inversible d'inverse $\sum_{n=1}^{\infty} u^n \in \mathcal{L}_C(E)$.

Proposition 26. Un EVN $(E, \|\cdot\|_E)$ est de Banach si et seulement si toute série $\sum u_n$ de E absolument convergente est convergente.

2.2 L'exemple des espaces L^p

Définition 27. Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, \infty[$, on note alors $\mathcal{L}^p = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable telle que } \int_X |f|^p d\mu < +\infty\}$ et $\mathcal{L}^\infty = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable telle que } \exists M > 0, |f(x)| < M \mu\text{-pp}\}$.

On définit l'espace vectoriel L^p (resp L^∞) comme l'espace quotient $\mathcal{L}^p$ (resp $\mathcal{L}^\infty$) par la relation d'équivalence d'égalité μ presque partout.

Définition 28. On définit pour $p \in [1, +\infty[$ les applications : $\|\cdot\|_p : L^p \rightarrow \mathbb{C}; f \mapsto \|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$, et $\|\cdot\|_\infty : L^\infty \rightarrow \mathbb{C}; f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{\mu\text{-pp}} |f(x)|$.

Théorème 29. (Hölder) Si $p, q \in [1, +\infty]$ sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (exposants conjugués) alors pour tout $f \in L^p$ et tout $g \in L^q$ on a $fg \in L^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Théorème 30. (Minkowski) Soit $p \in [1, +\infty]$ et $f, g \in L^p$ alors $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Corollaire 31. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace L^p est un EVN.

Théorème 32. (Riesz-Fisher) Pour tout $p \in [1, +\infty]$ l'espace L^p est de Banach.

3 Espaces de Hilbert

3.1 Généralités

Soit H un $\mathbb{K}$ espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 33. Le couple $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est appelé espace pré-hilbertien réel (resp complexe) lorsque $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire, c'est-à-dire une forme bilinéaire définie positive symétrique (resp anti-symétrique).

Remarque 34. Un produit scalaire induit une norme définie par $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ pour tout $x \in H$.

Définition 35. Un espace de Hilbert est un espace pré-hilbertien complet pour la distance induite par la norme du produit scalaire.

À présent on considère $(H, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert.

Théorème 36. (Cauchy-Schwarz) Pour tout $x, y \in H$ on a : $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\| \|y\|$.

Exemple 37. Pour $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est dit usuel.

Pour $\mathbb{C}^n$ le produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ est dit usuel.

En réalité quelque soit le produit scalaire sur $\mathbb{K}^n$, c'est un espace de Hilbert.

Proposition 38. Pour tout $x, y \in H$ on a : $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle)$.

Proposition 39. Pour tout $x, y \in H$ on a : $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$ si et seulement si la famille (x, y) est liée.

Théorème 40. (Égalité du parallélogramme) Pour tout $x, y \in H$ on a : $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

3.2 Applications linéaires

Théorème 41. (Projection sur un convexe fermé) Soit $C \subset H$ une partie convexe de H , alors pour tout $x \in H$, il existe un unique point $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C)$. Ce point est appelé projeté orthogonal de x sur C , noté $p_C(x)$ est caractérisé par la propriété : $y \in C, \forall z \in C, \operatorname{Re}(\langle x - y, z - y \rangle) \leq 0$.

Théorème 42. Sous les mêmes hypothèses, pour tout $x, y \in H$ on a : $\|x - y\| \leq \|p_C(x) - p_C(y)\|$. C'est-à-dire que l'application $p_C : H \rightarrow C; x \mapsto p_C(x)$ est 1-lipschitzienne.

Proposition 43. Soit F un sous espace vectoriel fermé de H alors p_F est un opérateur linéaire. Si $x \in H$ alors $p_F(x) \in F$ est l'unique point vérifiant $x - y \in F^\perp$.

Corollaire 44. Pour tout sous espace vectoriel fermé $F \subset H$, on a $H = F \oplus F^\perp$.

Corollaire 45. Pour tout sous espace vectoriel $E \subset H$, on a $H = \overline{E} \oplus E^\perp$.

Théorème 46. (Représentation de Riesz) Soit $y \in H$, l'application $\varphi_y : H \rightarrow \mathbb{K}; x \mapsto \langle x, y \rangle$ est une forme linéaire sur H vérifiant $\|\varphi_y\| = \|y\|$. De plus l'application $\phi : H \rightarrow H^*; y \mapsto \varphi_y$ est une isométrie surjective, linéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et antilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. C'est-à-dire : $\forall \varphi \in H^*, \exists ! y \in H, \varphi = \phi(y) = \varphi_y : x \mapsto \langle x, y \rangle$.

Dev 1 : Équivalence des normes et théorème 14 18

Dev 2 : Projection sur un convexe fermé et Riesz 41 42 et 46

Références

- [Gou08] Xavier GOURDON : Les maths en tête - Analyse. Ellipses, 2008.
- [Has18] Nawfal El Hage HASSAN : Topologie générale et espaces normés. Dunod, 2018.
- [HL99] HIRSH-LACOMBE : Éléments d'analyse fonctionnelle. Dunod, 1999.

RAPPORT DU JURY :

Cette leçon est particulièrement vaste, et il convient de faire des choix. Il est inutile de commencer systématiquement le plan de cette leçon par de longs rappels sur les normes : comme toutes les autres, cette leçon ne doit pas tomber dans le formalisme, mais bien proposer des résultats significatifs illustrés par des exemples bien choisis, en particulier de normes équivalentes ou non, ou de calculs de normes subordonnées. En ce qui concerne le contenu, le programme offre de nombreuses possibilités qui permettent aussi de faire un développement conséquent d'un résultat central ou d'un enchaînement de résultats centraux de cette leçon : cas de la dimension finie, intervention de la complétude (en particulier le cas hilbertien), étude de la compacité de la boule unité fermée, lien entre continuité d'une forme linéaire (ou plus généralement, d'une application linéaire de rang fini) et fermeture du noyau...

Pour les candidates et candidats solides, des prolongements possibles sont : les conséquences du théorème de Baire dans le cadre des espaces de Banach (tout particulièrement le théorème de Banach-Steinhaus et son utilisation pour construire des objets pathologiques), le théorème de Hahn-Banach et ses conséquences, la théorie de algèbres de Banach, la détermination de duals topologiques.