

Leçon 206 : Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1 Espaces vectoriels de dimension finie

1.1 Résultats topologiques

Définition 1. On dit que E est de dimension finie si il existe une famille génératrice finie de E . Dans le cas contraire E est dit de dimension infinie. Par convention $\dim(0) = 0$.

Définition 2. Deux normes N_1, N_2 sont dit équivalentes lorsqu'il existe $a, b > 0$ tels que pour tout $x \in E$, on ait $aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN_1(x)$.

Théorème 3. Dans un EVN de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Lemme 4. Un EVN de dimension finie non nul possède une infinité de normes.

Proposition 5. Toute application linéaire d'un EVN de dimension finie vers un EVN quelconque est continue.

Exemple 6. Pour $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\left\| \sum_{i=1}^n a_i X^i \right\|$, l'application $f : E \rightarrow E, P \mapsto P'$ n'est pas continue car $\|f(X^n)\| = n$ mais $\|X^n\| = 1$.

Corollaire 7. Tout EVN de dimension finie est complet.

1.2 Compacité

Corollaire 8. Soit E un EVN de dimension finie et $A \subset E$ alors A est compact si et seulement si A est fermé borné.

Théorème 9. (Riesz) On a l'équivalence suivante : E est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée $B_f(0, 1)$ est compacte.

2 Applications différentiables

2.1 Généralité

Définition 10. Soit $a \in U$, f est dite différentiable en a lorsqu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}_C(E, F)$ telle que $f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|)$ quand $h \rightarrow 0$. Lorsque φ existe elle est unique appelée différentielle de f en a et notée df_a .

Définition 11. Si f est différentiable en tout point de U , on dit que f est différentiable sur U et l'application $df : U \rightarrow \mathcal{L}_C(E, F); a \mapsto df_a$ est appelée application différentielle de f . Si df est continue alors on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque 12. En dimension finie la condition de continuité de df_a est automatiquement vérifiée par linéarité. L'équivalence des normes permet aussi de montrer que l'existence et la valeur de df_a ne dépend des normes choisies.

Exemple 13. Si f linéaire continue alors $f(a+h) = f(a) + f(h)$ donc $df_a = f$ pour tout $a \in U$.

Définition 14. On dit que f est dérivable en a selon $h \in E$ lorsque $\frac{\partial f}{\partial h}(a) := \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$ existe.

Proposition 15. Si f est différentiable en a alors admet une dérivée selon tout vecteur en a et $\frac{\partial f}{\partial h}(a) = df_a(h)$.

Remarque 16. La réciproque est fausse, la dérivabilité selon tout vecteur n'implique même pas la continuité. Par exemple avec $f : (x, y) \mapsto xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ et $f(0, 0) = 0$.

Définition 17. Soit $a \in U$, si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ f est dérivable en a selon e_i , on dit que f admet une dérivée partielle en a d'indice i notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Théorème 18. Si toutes les dérivées partielles de f sur U existent et si elles sont continues en $a \in U$ alors f est différentiable en a et $df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$.

Remarque 19. La réciproque est fautive par exemple $f : x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ et $f(0) = 0$ est différentiable en 0 mais f' n'est pas continue en 0.

2.2 Dérivées partielles et TIL

Définition 20. On suppose que f admet une dérivée partielle en a pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On appelle matrice jacobienne de f en a la matrice $Jf_a = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket}$ avec $m = \dim(F)$ et $f = (f_1, \dots, f_m)$

Définition 21. Sous réserve d'existence, on peut définir par récurrence les dérivées partielles d'ordre p par

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_{p-1}} \dots \partial x_{i_1}} \right)$$

. Une fonction est dite de classe $\mathcal{C}^p$ lorsque toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre p existent et sont continues.

Théorème 22. (Schwarz) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ continues en $a \in U$. Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$.

Définition 23. Soit f une fonction réelle deux fois différentiable en a . On appelle matrice Hessienne de f en a la matrice $H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque 24. Grâce au théorème de Schwarz on sait que $H_f(a)$ est une matrice symétrique.

Définition 25. On suppose que toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de f existent et que f est réelle. On appelle laplacien de f l'application $\Delta f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$.

Exemple 26. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $g : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 ; (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. La fonction $F = f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et on a $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$.

Théorème 27. (Inversion locale) Soient E, F espaces de Banach et $U \subset E$ ouvert et $f : U \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que df_a soit un isomorphisme bicontinuu de E dans F . Alors il existe un voisinage ouvert V de a et W de $f(a)$ tel que :

1. $f|_V$ est une bijection de $V \rightarrow W$.
2. L'application inverse $g : W \rightarrow V$ est continue,
3. g est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in V$, on a $dg_{f(x)} = df_x^{-1}$.

Corollaire 28. Sous les mêmes conditions que le théorème, f est une application ouverte, c'est à dire que pour tout ouvert $\Omega \subset U$ on a $f(\Omega)$ ouvert de F .

Théorème 29. (Inversion globale) Soient E, F espaces de Banach, $U \subset E$ ouvert et $f : U \rightarrow F$ injective de classe $\mathcal{C}^\infty$. On a l'équivalence suivante :
Pour tout $x \in U$, df_x est inversible et bicontinuu si et seulement si $V = f(U)$ est ouvert de F et $f^{-1} : V \rightarrow U$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

OU VERSION AVEC $\mathcal{C}^1$ DIFFEO

2.3 Optimisation

Définition 30. On que $a \in U$ est un point critique de f lorsque f différentiable en a et $df_a = 0$.

Proposition 31. Si f différentiable en $a \in U$ et a extrema relatif de f alors a est un point critique.

Exemple 32. Pour la fonction réelle $x \mapsto x^3$ on observe que 0 est point critique mais pas extremum.

Théorème 33. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $df_a = 0$ alors :

1. Si f admet un maximum (resp minimum) relatif en a , alors $H_f(a)$ est positive (resp négative).
2. Si $H_f(a)$ est définie positive (resp définie négative) alors f admet un maximum (resp minimum) relatif en a .

Théorème 34. (Extrema liés) Soient $f, g_1, \dots, g_r$ des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur un ouvert $U \subset E$ et $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f|_\Gamma$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les $dg_{1,a}, \dots, dg_{r,a}$ sont linéairement indépendantes,

alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ (uniques et appelés multiplicateurs de Lagrange) tels que $df_a = \sum_{k=1}^r \lambda_k dg_{k,a}$.

Exemple 35. On peut retrouver l'inégalité arithmético-géométrique à partir de ce théorème.

2.4 Équations dérivées partielles

Théorème 36. (Cauchy-Lipschitz linéaire) Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ des applications continues. Alors le problème $y' = A(t)y + B(t)$ admet une unique solution $y : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ telle que $y(t_0) = y_0$.

Théorème 37. Soit $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ continue. L'ensemble S_H des solutions de l'équation différentielle homogène $\frac{dY}{dt} = A(t)Y$ est un sous espace vectoriel de dimension n du $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$.

Proposition 38. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'équation différentielle $(H) : Y' = AY$ possède des solutions maximales définies sur $\mathbb{R}$ et la solution prenant une valeur donnée $V_0 \in \mathbb{R}^n$ en $t = 0$ est $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n ; t \mapsto \exp(tA)V_0$.

Exemple 39. On étudie le système $Y' = AY$ où $Y = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Les solutions sont de la forme $t \mapsto \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{it} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma e^{-it} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ -2 \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. C'est la solution générale complexe.

La solution générale réelle est $t \mapsto \lambda e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \\ -2 \cos(t) \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \\ -2 \sin(t) \end{pmatrix}$ avec $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$.

Dev 1 : Équivalence des normes et théorème de Riesz 3 et 9
DEV 2 : Théorème d'inversion locale 27

Références

- [BER21] Florent BERTHELIN : Équations différentielles. Cassini, 2021.
- [GOU20] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Analyse - 3e édition. ELLIPSES, 2020.
- [ROU03] François ROUVIERE : Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation. CASSINI, 2003.

RAPPORT DU JURY :

Cette leçon d'exemples est l'occasion d'une réflexion sur de nombreuses parties du programme. En topologie, il s'agit bien sûr des propriétés spécifiques aux espaces normés de dimension finie, notamment l'utilisation des valeurs d'adhérence, l'équivalence des normes ou encore l'identité entre parties compactes et parties fermées et bornées. D'autres champs d'application sont : la théorie de la mesure (mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$), le calcul différentiel (utilisation de matrices jacobiniennes, espaces tangents, extrema liés, etc.), les équations différentielles linéaires, les séries de Fourier et plus généralement l'approximation dans un espace préhilbertien séparable par projection sur des sous-espaces de dimension finie.

Les candidates et candidats solides peuvent aborder la question de l'unicité de la meilleure approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d , ou les liens entre la régularité et la qualité de l'approximation par des polynômes (algébriques ou trigonométriques) voire des fonctions rationnelles. D'autres pistes possibles sont l'étude des propriétés spectrales des opérateurs compacts, ou le théorème de Grothendieck sur les sous-espaces fermés de L^p contenus dans L^∞ .