

Leçon 205 : Espaces complets. Exemples et applications

On suppose connues les propriétés usuelles des espaces vectoriels normés, métriques et topologiques, des espaces L^p (Minkowski, Hölder) et des espaces pré-hilbertiens (orthogonalité, Cauchy-Schwarz, Pythagore, parallélogramme).

1 Suites de Cauchy et espaces complets [Has18]

Dans ce chapitre, nous considérons (E, d) un espace métrique quelconque.

1.1 Suites de Cauchy

Définition 1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E ,

— On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers $l \in E$, lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, d(x_n, l) < \varepsilon$$

— Si l existe alors l est unique et s'appelle **limite** de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

— On dit que $a \in E$ est une **valeur d'adhérence** de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geq p, d(x_n, a) < \varepsilon$$

Définition 2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E , on dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de **Cauchy**, lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p > N, \forall q > N, d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

Remarque 3. La notion d'être de Cauchy dépend de la distance choisie, alors que la convergence dépend de la topologie induite par la distance.

Proposition 4. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E , on a :

- Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.
- Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy alors toutes ses sous-suites le sont aussi.
- Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et possède une valeur d'adhérence $a \in E$, alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a .

Proposition 5. Soit (F, d') un espace métrique, soit $f : E \rightarrow F$ une fonction uniformément continue et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy.

Remarque 6. C'est faux avec la continuité simple.

1.2 Espaces complets

Définition 7. On dit que (E, d) est **complet** lorsque toute suite de Cauchy de E est convergente.

Remarque 8. Ici encore la notion de complétude est dépendante de la distance utilisée.

Exemple 9. 1. L'espace $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet

2. L'espace $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ne l'est pas.

Proposition 10. Soit (Y, d') un espace métrique et $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ un homéomorphisme. Si f est uniformément continue sur X et que (Y, d') est complet, alors (X, d) est complet.

Proposition 11. Soit A un sous ensemble non-vide de (X, d) . On a :

- Si A est complet, alors A est fermé dans X .
- Si A est dense dans X et $A \subsetneq X$, alors A n'est pas complet.
- Si (X, d) est complet et A fermé dans X , alors A est complet.

Exemple 12. L'espace $([0, 1], |\cdot|)$ est complet en tant que partie fermée de $\mathbb{R}$.

Proposition 13. Soient $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$ des espaces métriques. L'espace métrique produit $E_1 \times \dots \times E_n$ muni de la distance produit d_∞ est complet si et seulement si pour tout $i \in 1, \dots, n$, l'espace métrique (E_i, d_i) est complet.

Exemple 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les espaces $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{R}^n$ sont complets.

Théorème 15. (Cantor) Soit (E, d) un espace complet et (F_n) une suite décroissante de fermés non vide de E , telle que la limite des diamètres des F_n tend vers 0. Alors il existe $x \in E$ tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

Remarque 16. L'hypothèse sur le diamètre est essentielle. En effet, si l'on considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fermés $F_n = [n, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui est complet, alors la suite (F_n) est une suite décroissante de fermés non vides de $\mathbb{R}$ dont l'intersection est vide.

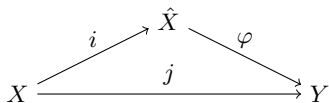
Proposition 17. Soit X un ensemble et (Y, d) un espace métrique.

1. Pour tout $f, g \in B(X, Y)$ (fonctions bornées), on pose :
$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$
 et c'est une distance sur $B(X, Y)$.
2. Si (Y, d) est complet, alors $(B(X, Y), d_\infty)$ est complet.
3. Si X est un espace topologique, alors on a :
 - (a) $C_b(X, Y)$ est fermé dans $B(X, Y)$,
 - (b) Si (Y, d) est complet, alors $C_b(X, Y)$ est complet.

1.3 Complétion des espaces métriques

Théorème 18. Soit (X, d) un espace métrique, alors :

1. Il existe un espace métrique complet $(\hat{X}, \hat{d})$ et une application isométrique $i : X \rightarrow \hat{X}$ telle que $i(X)$ soit dense dans $\hat{X}$. Ainsi on peut identifier X à $i(X)$ et considérer X comme sous-ensemble de $\hat{X}$.
2. Si (Y, d') espace métrique complet et si il existe une application isométrique $j : X \rightarrow Y$ telle que $j(X)$ soit dense dans Y . Alors il existe une unique application $\varphi : \hat{X} \rightarrow Y$ telle que le diagramme suivant soit commutatif.



De plus, φ est une isométrie de $\hat{X}$ vers Y . Autrement dit $(\hat{X}, \hat{d})$ et (Y, d') sont isométriques.

Définition 19. On appelle un tel espace $(\hat{X}, \hat{d})$, le **complété** de (X, d) . L'isométrie i est appelée **complétion**.

Exemple 20. Si (Y, d) est un espace métrique complet, et X une partie de Y , alors $\overline{X}$ est le complété de X .

2 Espaces complet particuliers

2.1 Espaces de Banach [Gou08]

Dans cette partie, on considère $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 21. On dit qu'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un **espace de Banach** lorsqu'il est complet.

Exemple 22. — Pour tout $p \in [1, +\infty]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

— Pour tout compact K , l'espace $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ est de Banach.

Proposition 23. Si F est un espace de Banach, alors $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{op})$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F est aussi un espace de Banach. Ainsi le dual topologique $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est un espace de Banach.

Corollaire 24. Si E est un espace de Banach, alors toute série $\sum_{n \geq 0} u_n$ de $\mathcal{L}(E, E)$ absolument convergente est convergente.

Proposition 25. Soit E un espace de Banach et $u \in \mathcal{L}(E, E)$ tel que $\|u\|_{op} < 1$. Alors $Id - u$ est inversible, son inverse est $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \in \mathcal{L}(E, E)$.

Définition 26. Pour $p > 1$, on note $\mathcal{L}^p$, l'ensemble des applications mesurables de X dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_X |f|^p d\mu < +\infty$. On note alors $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$. On définit, $\mathcal{L}^\infty$ l'ensemble des fonctions mesurables de sup essentiel borné et on note

$\|\cdot\|_\infty$ ce sup essentiel.

On définit directement les espaces L^p avec $p \in [1, \infty]$, c'est le quotient de $\mathcal{L}^p$ par la relation d'équivalence $f \sim g \iff f = g \mu - pp$. On peut le voir aussi le quotient de $\mathcal{L}^p$ par $\{v \in \mathcal{L}^p, \|v\|_p = 0\}$.

Proposition 27. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé

Théorème 28. (Riesz-Fisher) Pour $p \in [1, \infty]$, l'espace $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est complet, donc un espace de Banach.

2.2 Espaces de Hilbert [HL99]

Définition 29. Un espace préhilbertien complet pour la norme définie par son produit scalaire est appelé **espace de Hilbert**.

Dans cette partie on considère $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{K}$ -espace de Hilbert (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), de norme $\|\cdot\|$ et d la distance induite par cette norme.

Proposition 30. L'espace $(L^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, où $\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 31. (Projection sur un convexe fermé) Soit C une partie fermée, convexe et non vide de E . Alors pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in C$ tel que :

$$\|x - y\| = d(x, C)$$

Ce point est appelé **projeté de x sur C** , est noté $P_C(x)$, et possède la propriété caractéristique suivante : $\forall z \in C, \operatorname{Re}(\langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle) \leq 0$

Corollaire 32. Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent on a :

$$\forall x_1, x_2 \in E, \|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

Corollaire 33. Si C est un sous-espace vectoriel convexe de E , alors la projection est linéaire et orthogonale.

Proposition 34. Pour tout sous espace vectoriel fermé F de E , on a :

$$E = F \oplus F^\perp$$

En particulier, on a : $\forall x \in E, x = P_F(x) + P_{F^\perp}(x)$. De plus, F est dense dans E si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Corollaire 35. Soit F un sous espace vectoriel de E , alors $\overline{F} = (F^\perp)^\perp$.

Théorème 36. (de représentation de Riesz) L'application de E dans E^* définie par $y \mapsto \phi_y = \langle \cdot, y \rangle$ est une isométrie antilinéaire surjective. C'est à dire, pour toute forme linéaire continue ϕ sur E , il existe un unique $y \in E$ tel que $\forall x \in E, \phi(x) = \langle x, y \rangle$, de plus $\|\phi\| = \|y\|$.

Corollaire 37. Tout espace de Hilbert est réflexif. C'est à dire que l'injection canonique dans son bidual est surjective.

2.3 Espaces de Baire [Has18] [Gou08]

Proposition 38. Soit X un espace topologique. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Pour toute famille dénombrable $(F_n)_{n \geq 0}$ de fermés de X telle que $X = \bigcup_{n \geq 0} F_n$, la réunion des intérieurs $\bigcup_{n \geq 0} F_n^\circ$ est dense dans X .
2. La réunion de toute famille dénombrable de fermés d'intérieurs vides de X est d'intérieur vide.
3. L'intersection de toute famille dénombrable d'ouverts denses de X est dense dans X .

Définition 39. Un espace topologique X est dit **espace de Baire** si il vérifie l'une des propriétés ci-dessus.

Exemple 40. Tout espace topologique discret est un espace de Baire.
 $\mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$ n'est pas un espace de Baire.

Proposition 41. Tout ouvert d'un espace de Baire est un espace de Baire.

Théorème 42. (Baire) Soit (X, d) un espace métrique complet. Alors X est un espace de Baire.

Théorème 43. Soit X un espace de Baire, (Y, d) un espace métrique, f une application de X dans Y et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'application continues de X dans Y qui converge simplement vers f .

On note C l'ensemble des points de X en lesquels f est continue, alors C est dense dans X .

Proposition 44. L'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ nulle part dérivables est dense dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

3 Applications de la complétude

3.1 Prolongement de fonctions [Has18]

Théorème 45. Soit A une partie dense de X espace métrique, Y un espace métrique complet et $f : A \rightarrow Y$ uniformément continue, alors :

Il existe une application $g : X \rightarrow Y$ prolongeant f . De plus, cette application est uniformément continue.

Remarque 46. C'est faux avec la continuité simple.

Corollaire 47. En particulier, pour (X, d) et (Y, d') des espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une application uniformément continue, il existe une unique application $\tilde{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ uniformément continue du complété de X dans le complété de Y , telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \hat{Y} \\ \uparrow 1 & & \uparrow 1 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Théorème 48. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé, $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach, H un sous espace vectoriel dense dans E et $f \in \mathcal{L}(H, F)$. Alors il existe une unique application $g \in \mathcal{L}(E, F)$ prolongeant f . De plus, on a $\|g\|_{op} = \|f\|_{op}$.

3.2 Théorème de point fixe [Que06] [Dem16]

Définition 49. Soient X et Y des espaces métriques et $k \in [0, 1[$. Une application $f : X \rightarrow Y$ est dite **k -contractante**, si :

$$\forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y).$$

Théorème 50. (Point fixe de Picard) Soit (X, d) un espace complet et une application $f : X \rightarrow X$ k -contractante, alors :

1. f possède un unique point fixe $a \in X$,
2. Pour tout $x_0 \in X$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par x_0 et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a , de plus :

$$d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$$

Remarque 51. Les 3 hypothèses sont indispensables :

- $X =]0, 1]$ et $f(x) = \frac{x}{2}$ contractante mais n'a pas de point fixe dans X qui n'est pas complet.
- Dans $\mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ vérifie $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ si $x \neq y$ mais n'est pas contractante et n'a pas de point fixe.
- $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ est contractante sur $X = [0, 1]$ mais $f(X) \neq X$ donc n'admet pas de point fixe.

Corollaire 52. Soit (X, d) un espace métrique complet, et $f : X \rightarrow X$ ayant une itérée f^p contractante, alors :

1. f possède un unique point fixe $a \in X$,
2. Pour tout $x_0 \in X$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par x_0 et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a .

Théorème 53. Soit (X, d) un espace métrique complet, Y un espace topologique, et $f : X \times Y \rightarrow X$ continue et uniformément contractante en x , dans le sens où il existe $k \in [0, 1[$ tel que : $\forall x, x' \in X, \forall y \in Y, d(f(x, y), f(x', y)) \leq k \cdot d(x, x')$.

Alors, pour tout $y \in Y$ fixé, l'équation $f(x, y) = x$ possède une unique solution $x = \varphi(y)$. Et l'application $\varphi : Y \rightarrow X$ est continue.

Exemple 54. Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue non identique à 1, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique fonction $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$f(0) = \alpha \text{ et } f'(x) = f(\varphi(x))$$

En effet, en posant $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $T : X \rightarrow X$ définie pour $x \in [0, 1]$ par

$$T(f)(x) = g(x) = \alpha + \int_0^x f(\varphi(t)) dt$$

On peut montrer que T est contractante et par le théorème précédent, le problème n'admet qu'une unique solution.

DEV 1 : Riesz-Fisher 28

DEV 2 : Projection sur un convexe fermé et Riesz 31, 32 et 36

DEV 3 : Point fixe Picard 50 et 53

Références

- [Dem16] Jean-Pierre DEMAILLY : Analyse numérique et équations différentielles. Collection Grenoble Science, 2016.
- [Gou08] Xavier GOURDON : Les maths en tête - Analyse. Ellipses, 2008.
- [Has18] Nawfal El Hage HASSAN : Topologie générale et espaces normés. Dunod, 2018.
- [HL99] HIRSH-LACOMBE : Éléments d'analyse fonctionnelle. Dunod, 1999.
- [MB12] Gilles Pagès MARC BRIANE : Théorie de l'intégration. Vuibert, 2012.
- [Que06] Hervé QUEFFÉLEC : Topologie, cours et exercices corrigés. Dunod, 2006.

RAPPORT DU JURY :

L'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence. Les illustrations ne manquent pas : existence de limites, utilisation de la convergence absolue ou normale, théorème du point fixe de Picard-Banach et ses applications, prolongement des applications uniformément continues à valeurs dans un espace métrique complet, et leurs innombrables applications. Le cas particulier des espaces de Hilbert est un riche terrain d'exploration : théorème de projection sur un convexe fermé et ses applications, analyse de Fourier sur le cercle ou sur la droite réelle. Les espaces L^p peuvent être abordés dans le cadre de cette leçon, mais sous leur angle spécifique d'espaces de Banach. Pour les candidates et candidats solides, le théorème de Baire fournit d'innombrables applications passionnantes. Ils pourront également songer à la théorie des algèbres de Banach, notamment l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, ou à l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.