

Leçon 204 : Connexité. Exemples et applications

Dans cette leçon, (E, d) est un espace métrique quelconque.

1 Espaces connexes

1.1 Caractérisations

Proposition 1. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Il n'existe pas U et V ouverts non vide disjointes telles que $E = U \cup V$.
2. Il n'existe pas U et V fermés non vide disjointes telles que $E = U \cup V$.
3. Les seuls ensembles ouvert-fermé de E sont E et $\emptyset$.

Définition 2. Si E vérifie l'une des propriétés ci-dessus il est dit connexe.

Exemple 3. L'ensemble $\mathbb{R}$ est connexe, plus généralement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'espace $\mathbb{R}^n$ est connexe.
Tout espace muni de la distance grossière est connexe.

Définition 4. Une partie $A \subset E$ est connexe, si elle est connexe pour la distance induite par celle de E .

Proposition 5. Soit $A, B \subset E$, si A connexe et $A \subset B \subset \bar{A}$ alors B est connexe.

Corollaire 6. L'adhérence d'une partie connexe est connexe.

Théorème 7. — Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de partie connexe de E .
Si pour tout $i \neq j \in I$ on a $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

En particulier si $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

— Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties connexes de E telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ alors $\bigcup_{n \geq 0} A_n$ est connexe.

Théorème 8. Soient E et F des espaces métriques avec E connexe et $f : E \rightarrow F$ continue, alors $f(E)$ est connexe.

Corollaire 9. Si X et Y sont homéomorphes et X connexe alors Y est connexe.

Théorème 10. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces métriques non vide, alors l'espace produit $\prod_{i \in I} A_i$ est connexe si et seulement si pour tout $i \in I$, A_i est connexe.

Proposition 11. Un espace vectoriel de dimension finie est connexe par arc donc connexe.

1.2 Composantes connexes

Définition 12. La relation $x \mathcal{R} y \iff \exists C$ connexe tel que $x \in C$ et $y \in C$, est une relation d'équivalence. Pour $x \in E$ la classe d'équivalence C_x est la réunion des connexes contenant x .

Proposition 13. Les composantes connexes de E sont des parties fermées et connexes de E .

Proposition 14. Les composantes connexes de E forment une partition de E . Ainsi E est connexe si et seulement si il ne possède qu'une seule composante connexe.

Proposition 15. Si les composantes connexes de E sont en nombre fini alors se sont des ouverts.

Exemple 16.

1.3 Connexité par arc

Définition 17. Soit $x, y \in E$ on appelle chemin reliant x à y toute application continue $\varphi : [0, 1] \rightarrow E$ telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = y$.

Définition 18. On dit que E est connexe par arc lorsque pour tout $x, y \in E$ il existe un chemin reliant x à y .

Proposition 19. *Pour toute partie $A \subset E$, si A est connexe par arc alors A est connexe.*

Remarque 20. La réciproque est généralement fausse. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ on considère $E = \{(0, y); -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, \sin(\frac{1}{x})); x \in]0, 1]\}$ est connexe mais pas connexe par arc.

Proposition 21. *Soit $n \geq 2$ et $B \subset \mathbb{R}^n$ une partie au plus dénombrable, alors $\mathbb{R}^n \setminus B$ est connexe par arc.*

Corollaire 22. *Pour tout $n \geq 2$ les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes.*

2 Applications

2.1 Cas réel

Théorème 23. *Les parties connexe de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.*

Théorème 24. *(Valeurs intermédiaires) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors $f(I)$ est un intervalle.*

Théorème 25. *(Darboux) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$ et I intervalle ouvert non vide, alors $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Remarque 26. Un ensemble dense dans un espace connexe ne peut pas être connexe. Par exemple $\mathbb{Q}$ qui n'est pas connexe mais est dense dans $\mathbb{R}$ connexe.

2.2 Calcul différentiel

Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable.

Proposition 27. *Soient E et F des evn de dimension finies et U et U ouvert connexe de E . Si $f : U \rightarrow F$ est différentiable de différentielle nulle alors f est constante.*

Théorème 28. *(Cauchy-Lipschitz local) Soient $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Pour tout $(t_0, y_0) \in U$ il existe $\alpha > 0$ tel que le problème de Cauchy associé ait une unique solution définie sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.*

Corollaire 29. *Sous les hypothèses du théorème précédent, si (u, I) et (v, J) sont des solutions de $u' = f(t, u)$ telles qu'il existe $t_0 \in J \cap I$ tel que $u(t_0) = v(t_0)$ alors $u = v$ sur $I \cap J$.*

Théorème 30. *(Cauchy-Lipschitz global) Soient $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonction continue vérifiant les hypothèses de Cauchy Lipschitz local. Alors pour tout $(t_0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy associé admet une unique solution maximale.*

Théorème 31. *(Inversion locale) Soient E et F espaces de Banach, U ouvert de E et $f : U \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que df_a isomorphisme bicontinu de E sur F . Alors il existe un voisinage ouvert V de a et W voisinage ouvert de $f(a)$ tel que :*

1. la restriction $f|_V$ est une bijection de V sur W .
2. L'application inverse g est continue.
3. g est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in V$ on a $dg_{f(x)} = df_x^{-1}$.

Corollaire 32. *(Application ouverte) Soient E et F de Banach, U ouvert de E et $f : U \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $x \in U$, df_x est inversible et bicontinue. Alors f est une application ouverte (l'image d'un ouvert est ouvert).*

Corollaire 33. *(Inversion globale) Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ injective de classe $\mathcal{C}^k$. Alors pour tout $x \in U$ df_x est inversible si et seulement si $f(U)$ ouvert et f est un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme de U sur V .*

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Définition 34. Une application $f : E \rightarrow E$ est dite strictement monotone s'il existe $k > 0$ tel que : $\forall x, y \in E, \langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq k \|x - y\|^2$.

Proposition 35. *Soit $f : E \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^1$, f est strictement monotone si et seulement si $\forall x, h \in E, \langle df_x(h), h \rangle \geq \|h\|^2$.*

Proposition 36. *Si $f : E \rightarrow E$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone alors f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de E sur E .*

2.3 Groupe linéaire[ROM17]

Définition 37. Pour $1 \leq i \leq n$ la matrice de dilatation est de la forme $D_i(\lambda) = I_n + (1 - \lambda)E_{ii}$. Pour $1 \leq i \neq j \leq n$ la matrice de transvection est de la forme $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$.

Théorème 38. *Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ s'écrit $A = \prod_{k=1}^r P_k D_n(\lambda) \prod_{j=1}^s Q_j$ où $P_1, \dots, P_r$ et $Q_1, \dots, Q_s$ sont des matrices de transvection et $\lambda = \det(A)$.*

Corollaire 39. *Les groupes $SL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arc.*

Théorème 40. *Le groupe $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ouvert et connexe par arc.*

Corollaire 41. *Les ensembles $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$ sont connexes par arc et sont les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$.*

DEV 1 : $GL_n(\mathbb{C})$ Dense ouvert connexe 40

DEV 2 : Fonctions strictement monotone 32,35 et 36

Références

- [CAL22] Philippe CALDERO : Carnet de voyage en algèbre. Calvage et Mounet, 2022.
- [GOU20] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Analyse - 3e édition. ELLIPSES, 2020.
- [HAS18] Nawfal El Hage HASSAN : Topologie générale et espaces normés. Dunod, 2018.
- [ROM17] Jean-Étienne ROMBALDI : Mathématiques pour l'Agrégation : Algèbre géométrie. De Boeck Supérieur, 2017.

RAPPORT DU JURY :

Dans cette leçon, une fois les propriétés élémentaires présentées, il convient de mettre en évidence à travers un choix judicieux, non nécessairement exhaustif, d'applications le fait que la connexité formalise l'idée d'espace d'un seul tenant, que la connexité par arcs permet d'illustrer géométriquement. Du point de vue opérationnel, les deux idées maîtresses sont la préservation de la connexité par image continue, et l'utilisation de la connexité pour passer du local au global. La seconde est abondamment illustrée dans le domaine du calcul différentiel, des équations différentielles non linéaires (passage d'une unicité locale à une unicité globale), des fonctions holomorphes (principe du prolongement analytique ou du maximum). En cas de non-connexité, la notion pertinente est celle de composante connexe, dont une première application est la structure des ouverts de $\mathbb{R}$, et

leur mesure. Les exemples issus de l'algèbre linéaire sont bien entendu les bienvenus, à condition de ne pas trop détourner la leçon... Pour les candidates et candidats solides, de bons prolongements sont le théorème de Runge, l'ensemble triadique de Cantor comme prototype d'espace métrique compact, parfait et totalement discontinu, la notion de simple connexité.