

Leçon 203 : Utilisation de la notion de compacité en analyse.

1 Notion de compacité

Définition 1. Un espace métrique (E, d) est dit compact lorsque de tout recouvrement d'ouverts de E on peut extraire un sous recouvrement fini. C'est-à-dire si $E = \bigcup_{i \in I} O_i$ avec O_i ouvert alors il existe $J \subset I$ fini tel que $E = \bigcup_{i \in J} O_i$.

Exemple 2. Tout espace métrique fini est compact. $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

Proposition 3. *Tout espace compact est borné.*

Proposition 4. *Soit $(F_n)_n$ suite décroissante de fermés non vide de E compact. Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.*

Proposition 5. *Une intersection quelconque de compacts est compacte et une union finie de compacts est compacte.*

Théorème 6. (Bolzano-Weierstrass) *Un espace métrique (E, d) est compact si et seulement si de toute suite de E on peut extraire une sous suite convergente dans E .*

Proposition 7. *On a les propriétés suivantes :*

1. *Une partie fermée d'un compact est compacte.*
2. *Une partie compacte est fermée et bornée.*
3. *Un espace compact est complet.*
4. *Un espace métrique produit $E_1 \times \dots \times E_n$ est compact si et seulement si tous les E_i sont compacts.*

Remarque 8. La réciproque du point 2 est fausse. La boule unité de $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$ est fermée bornée mais pas compacte.

2 Fonctions continues sur un compact

2.1 Premiers résultats

Proposition 9. *Soit $f : E \rightarrow F$ continue et E compact alors $f(E)$ compact de F .*

Corollaire 10. *Si X compact et f bijective alors f est un homéomorphisme.*

Remarque 11. C'est faux avec la pré-image par exemple $f = \sin$ on a $f^{-1}([-1, 1]) = \mathbb{R}$.

Proposition 12. *Soit (E, d) compact et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Théorème 13. (Rolle) *Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Théorème 14. (Heine) *Si $f : E \rightarrow F$ continue sur E compact alors f est uniformément continue sur E .*

Théorème 15. (Dini 1) *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions de X compact dans $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue alors la convergence est uniforme.*

Théorème 16. (Dini 2) *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions croissantes et continues de $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle dans $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ alors la convergence est uniforme.*

Exemple 17. Sur $[-1, 1]$ la suite de $\mathbb{R}[X]$ définie par $P_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n(x)^2)$ vérifie $0 \leq p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq |x|$ et converge uniformément vers $|x|$ par Dini.

2.2 Densité de familles de fonctions

Définition 18. Une partie $H \subset \mathcal{C}(X)$ est dite séparante lorsque pour tout $(x, y) \in X^2$ avec $x \neq y$, il existe $h \in H$ tel que $h(x) \neq h(y)$.

Définition 19. Une partie $H \subset \mathcal{C}(X)$ est dite réticulée lorsque pour tout $(f, g) \in H^2$, les fonctions $\sup(f, g) : x \mapsto \max(f(x), g(x))$ et $\inf(f, g) : x \mapsto \min(f(x), g(x))$ sont des éléments de H .

Lemme 20. On suppose que X possède au moins 2 éléments. Soit $H \subset \mathcal{C}(X)$ vérifiant les conditions :

1. H est réticulée,
2. Soient $x, y \in X$ avec $x \neq y$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe $u \in H$ tel que $u(x) = \alpha$ et $u(y) = \beta$.

Alors H est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Théorème 21. Si H est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(X)$ réticulé, séparant et contenant les fonctions constantes, alors H est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Exemple 22. L'ensemble des fonction lipschitzienne de X dans $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Théorème 23. (Stone-Weierstrass réel) Toute sous algèbre de $\mathcal{C}(X)$ séparante et contenant les constantes est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Exemple 24. $X \subset \mathbb{R}^d$ compact et $H = \{x \mapsto P(x), P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]\}$ est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Remarque 25. Le cas où $d = 1$ et $X = [a, b]$ est connu comme le théorème de Weierstrass.

Remarque 26. Pour la version complexe du théorème il faut ajouter l'hypothèse de contenir la conjugaison aux précédentes pour avoir la densité.

2.3 Ascoli et équicontinuité

Soit (X, d) un espace métrique métrique.

Définition 27. Une partie $H \subset \mathcal{C}(X)$ est dite équicontinue en $x_0 \in X$ lorsque $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, d(x, x_0) < \eta \implies \forall h \in H, |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$.

Elle est dite équicontinue si elle l'est en tout point de X .

Elle est dite uniformément équicontinue lorsque $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X, d(x, y) < \eta \implies \forall h \in H, |h(x) - h(y)| < \varepsilon$.

Remarque 28. Comme X compact les deux notions coïncident.

Exemple 29. Toute partie finie de $\mathcal{C}(X)$ est équicontinue. L'ensemble des fonctions k -lipschitzienne pour $k > 0$ est équicontinue.

Proposition 30. Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite équicontinue de $\mathcal{C}(X)$ et D une partie dense de X . Si la suite $(f_n(x))_n$ converge pour tout $x \in D$, alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$.

Théorème 31. (Ascoli) Une partie de $\mathcal{C}(X)$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X)$ si et seulement si elle est bornée et équicontinue.

3 Espaces vectoriels normés

Définition 32. Deux normes N_1, N_2 sont dit équivalentes lorsqu'il existe $a, b > 0$ tels que pour tout $x \in E$, on ait $aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN_1(x)$.

Théorème 33. Dans un EVN de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Lemme 34. Un EVN de dimension finie non nul possède une infinité de normes.

Proposition 35. Toute application linéaire d'un EVN de dimension finie vers un EVN quelconque est continue.

Exemple 36. Pour $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\left\| \sum_{i=1}^n a_i X^i \right\|$, l'application $f : E \rightarrow E, P \mapsto P'$ n'est pas continue car $\|f(X^n)\| = n$ mais $\|X^n\| = 1$.

Corollaire 37. Tout EVN de dimension finie est complet.

Corollaire 38. Soit E un EVN de dimension finie et $A \subset E$ alors A est compact si et seulement si A est fermé borné.

Théorème 39. (Riesz) On a l'équivalence suivante : E est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée $B_f(0, 1)$ est compacte.

Proposition 40. L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) | {}^t M M = I_n\}$ est compact dans $GL_n(\mathbb{R})$.

Théorème 41. (*Décomposition polaire*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $\mu : \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$; $(O, S) \mapsto OS$ est un homéomorphisme.

DEV 1 : Stone Weierstrass 20,21 et 23

Dev 2 : Équivalence des normes et théorème de Riesz 33 et 39

Références

- [FH99] Gilles LACOMBE FRANCIS HIRSH : Éléments d'analyse fonctionnelle. Dunod, 1999.
- [GOU20] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Analyse - 3e édition. ELLIPSES, 2020.

RAPPORT DU JURY :

Cette leçon ne porte pas sur la compacité en général mais sur son utilisation. On peut songer à plusieurs thèmes : théorèmes d'existence exploitant la compacité, utilisation de la compacité pour obtenir des uniformités. Sur le premier sujet, on peut s'intéresser à l'utilisation, dans les espaces compacts ou les espaces normés de dimension finie, des valeurs d'adhérence pour prouver des convergences ou des continuités, et bien sûr aux problèmes d'extrema. Un exemple est le théorème d'équivalence des normes sur un espace de dimension finie, qui repose sur un argument de compacité qu'il faut avoir bien compris. Sur le second, on peut explorer quelques unes des innombrables applications du théorème de Heine (intégrabilité au sens de Riemann des fonctions continues sur un segment, continuité des translations dans L^p , etc), mais aussi l'utilisation de sous-recouvrements finis (par exemple pour passer du local au global).

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la caractérisation des espaces normés de dimension finie par la compacité de la boule unité fermée (éventuellement assortie d'applications), aux équations différentielles non linéaires (phénomène de sortie de tout compact), à l'équicontinuité (théorème d'Ascoli), aux familles normales (théorème de Montel), aux opérateurs compacts.