

Leçon 201: Espaces de fonctions. Exemples et applications

On se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (E, d) et (F, d') sont des espaces métriques et X un ensemble.

1 Fonctions continues

1.1 Généralités et convergence[GOU20][FH99]

Définition 1. Une application $f : E \rightarrow F$ est continue en $a \in E$ lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, d(x, a) < \eta \implies d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$

Définition 2. Une application $f : E \rightarrow F$ est uniformément continue sur E lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in E^2, d(x, y) < \eta \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Proposition 3. L'espace $\mathcal{C}^0(E, \mathbb{K})$ des fonctions continues de E dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Proposition 4. Si f est uniformément continue sur E alors f est continue sur E .

Remarque 5. La réciproque est fausse, par exemple $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément continue.

Définition 6. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonction de X dans E et $f : X \rightarrow E$ alors on dit :

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement (cvs) vers f sur X lorsque : $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément (cvu) vers f sur X lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X, d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Proposition 7. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cvu vers f sur X alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cvs vers f .

Remarque 8. La réciproque est fausse par exemple avec $f_n : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto x^n$ cvs vers la fonction nulle. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x' \in [0, 1[$ tel que $x^n \geq 1/2$ donc pas de cvu sur $[0, 1[$ mais sur $[0, 1/2[$ oui.

Théorème 9. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonction continues sur E à valeur dans F qui cvu vers $f : E \rightarrow F$ alors f est continue sur E .

1.2 Fonctions continues sur un compact

On pose $\mathcal{C}(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ continues}\}$

Proposition 10. Soit $f : E \rightarrow F$ continue et E compact alors $f(E)$ compact de F .

Remarque 11. C'est faux avec la pré-image par exemple $f = \sin$ on a $f^{-1}([-1, 1]) = \mathbb{R}$.

Proposition 12. Soit $I \subset \mathbb{R}$ compact et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 13. (Heine) Si $f : E \rightarrow F$ continue sur E compact alors f est uniformément continue sur E .

Théorème 14. (Dini 1) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle dans $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue alors la convergence est uniforme.

Théorème 15. (Dini 2) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions croissantes et continues de $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle dans $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ alors la convergence est uniforme.

Exemple 16. Sur $[-1, 1]$ la suite de $\mathbb{R}[X]$ définie par $P_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n(x)^2)$ vérifie $0 \leq p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq |x|$ et converge uniformément vers $|x|$ par Dini.

1.3 Densité de familles de fonctions[FH99]

Dans cette partie X est un espace compact.

Définition 17. Une partie $H \subset \mathcal{C}(X)$ est dite séparante lorsque pour tout $(x, y) \in X^2$ avec $x \neq y$, il existe $h \in H$ tel que $h(x) \neq h(y)$.

Définition 18. Une partie $H \subset \mathcal{C}(X)$ est dite réticulée lorsque pour tout $(f, g) \in H^2$, les fonctions $\sup(f, g) : x \mapsto \max(f(x), g(x))$ et $\inf(f, g) : x \mapsto \min(f(x), g(x))$ sont des éléments de H .

Lemme 19. On suppose que X possède au moins 2 éléments. Soit $H \subset \mathcal{C}(X)$ vérifiant les conditions :

1. H est réticulée,
2. Soient $x, y \in X$ avec $x \neq y$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe $u \in H$ tel que $u(x) = \alpha$ et $u(y) = \beta$.

Alors H est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Théorème 20. Si H est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(X)$ réticulé, séparant et contenant les fonctions constantes, alors H est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Exemple 21. L'ensemble des fonction lipschitzienne de X dans $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Théorème 22. (Stone-Weierstrass réel) Toute sous algèbre de $\mathcal{C}(X)$ séparante et contenant les constantes est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Exemple 23. $X \subset \mathbb{R}^d$ compact et $H = \{x \mapsto P(x), P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]\}$ est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Remarque 24. Le cas où $d = 1$ et $X = [a, b]$ est connu comme le théorème de Weierstrass.

Remarque 25. Pour la version complexe du théorème il faut ajouter l'hypothèse de contenir la conjugaison aux précédentes pour avoir la densité.

2 Espaces L^p

2.1 Généralités [MB12]

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 26. Pour $p > 0$ on note $\mathcal{L}^p$ l'ensemble des fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_X |f|^p d\mu < \infty$. On note alors $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$.

Pour $p = \infty$, $\mathcal{L}^\infty$ est l'ensemble des fonctions mesurables de sup essentiel borné et on note $\|\cdot\|_\infty$ ce sup essentiel.

Proposition 27. Pour tout $p > 0$, l'espace $\mathcal{L}^p$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Proposition 28. Si $\mu(X) < \infty$ et $0 < p \leq q$, alors $\mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p$.

Théorème 29. (Hölder) Soient $p, q \geq 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$. Alors $fg \in \mathcal{L}^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Avec égalité si et seulement si il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$.

Remarque 30. C'est aussi vrai pour $p = 1$ et $q = \infty$.

Théorème 31. (Minkowski) Pour $p \in [1, \infty[$, pour tout $f, g \in \mathcal{L}^p$ on a $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Avec égalité quand $p > 1$ si et seulement si $f = 0$ μ -presque partout ou bien il existe $\alpha \geq 0$ tel que $g = \alpha f$. Si $p = 1$ l'égalité à lieu si et seulement si $f\bar{g} \geq 0$.

Définition 32. On pose L^p le quotient de $\mathcal{L}^p$ par $\{v \in \mathcal{L}^p \mid \|v\|_p = 0\}$ pour $p \in [1, \infty]$. En fait c'est la relation d'équivalence $f \sim g \iff f = g \mu$ -pp.

Proposition 33. L'espace $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé.

Théorème 34. (Minkowski généralisé) Soit $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une suite de fonction positives. Alors pour tout $p \in [1, \infty[$ on a $\left\| \sum_{n \geq 0} f_n \right\|_p \leq \sum_{n \geq 0} \|f_n\|_p < \infty$.

Théorème 35. (Riesz-Fisher) Pour $p \in [1, \infty]$ l'espace $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé complet.

Corollaire 36. L'espace L^2 muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_X f\bar{g} d\mu$ est un espace de Hilbert.

2.2 Densité dans les L^p

On note $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid f \text{ à support compact}\}$

Proposition 37. Pour tout $p \in [1, \infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

Proposition 38. Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, pour tout $p \in [1, \infty[$, l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans L^p .

Définition 39. Deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont convolables lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable. On définit alors le produit de convolution de f par g par : $\forall x \in \mathbb{R}, f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$.

Proposition 40. La convolution vérifie les propriétés suivantes :

1. Lorsqu'il existe $f * g(x) = g * f(x)$ et $|f * g(x)| \leq |f| * |g|(x)$.
2. Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Proposition 41. Soient $p, q \in [1, \infty]$ tels que $1/p + 1/q = 1$ et soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$. Alors $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, uniformément continue et $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$ avec $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Théorème 42. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $f * g$ est définie presque partout et $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ avec $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Remarque 43. Le $\mathbb{K}$ espace vectoriel $(L^1(\mathbb{R}), +, \cdot)$ muni de la convolution $*$ est une $\mathbb{K}$ algèbre commutative sans unité.

Théorème 44. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$ avec $p \in [1, \infty]$, alors $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

Définition 45. Une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^1(\mathbb{R}^d)$ est une approximation de l'unité lorsqu'elle vérifie :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n d\lambda_d = 1$,
2. $\sup_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha_n| d\lambda_d < \infty$,
3. Pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > \varepsilon} |\alpha_n| d\lambda_d = 0$.

Exemple 46. — Noyau de Laplace sur $\mathbb{R}$: $\forall t > 0, \alpha_t(x) = \frac{1}{2t} e^{-|x|/t}$,

— Noyau de Cauchy sur $\mathbb{R}$: $\forall t > 0, \alpha_t(x) = \frac{t}{\pi(t^2 + x^2)}$,

— Noyau de Gauss sur $\mathbb{R}^d$: $\forall t > 0, \alpha_t(x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^d} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$.

Théorème 47. Soit $(\alpha_n)_n$ une approximation de l'unité. Soit $p \in [1, \infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors ; $\forall n \geq 1, f * \alpha_n \in L^p(\mathbb{R})$ et $f * \alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_p} f$.

Définition 48. Une suite $(\alpha_n)_n$ est dite régularisante lorsque c'est une approximation de l'unité et pour tout $n \geq 1, \alpha_n \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 49. L'espace $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{C}_K(\mathbb{R}^d)$ et dense dans tous les $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Références

- [FH99] Gilles LACOMBE FRANCIS HIRSH : Éléments d'analyse fonctionnelle. Dunod, 1999.
- [GOU20] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Analyse - 3e édition. ELLIPSES, 2020.
- [MB12] Gilles PAGES MARC BRIANE : Théorie de l'intégration. Vuibert, 2012.

RAPPORT DU JURY :

Sans sortir du programme, il y a au moins deux thèmes très riches pour nourrir le plan : espaces de fonctions continues sur un compact, espaces L_p sur le cercle ou sur la droite réelle. Sur le premier sujet, le jury attend une bonne familiarité avec la convergence uniforme et son utilisation pour justifier des régularités. Le théorème de Stone-Weierstrass est évidemment incontournable, dans ses différentes versions, constructives ou non. La complétude peut également être exploitée, par exemple en lien avec les équations différentielles ou intégrales. Sur le second, la convolution et ses applications, ainsi que l'analyse de Fourier fournissent un large terrain d'exploration.

Plusieurs prolongements s'offrent aux candidates et candidats solides : théorème de Baire et ses innombrables applications, espaces de fonctions holomorphes (théorème de Montel et ses applications, espaces de Hardy, etc.), espaces de fonctions régulières (fonctions lipschitziennes, C_k , classe de Schwartz), algèbres de Banach de fonctions (algèbre de convolution $L_1 p R_q$, algèbre du disque, algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, etc.), étude des parties compactes de $C_p K_q$ (K compact) voire de L_p .