

Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2, et E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ avec une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

1 Généralités

1.1 Formes bilinéaires et quadratiques

Définition 1. Une forme bilinéaire sur E est une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tout $x, y \in E$ les applications $z \mapsto \varphi(z, y)$ et $z \mapsto \varphi(x, z)$ sont linéaires. Une telle forme bilinéaire est dite symétrique lorsque pour tout $x, y \in E$ on a $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

Exemple 2. Soient $l_1, \dots, l_p : E \rightarrow \mathbb{K}$ des formes linéaires et $(\alpha_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ des scalaires alors $(x, y) \mapsto \sum_{1 \leq i < j \leq p} \alpha_{i,j} l_i(x) l_j(y)$ est une forme bilinéaire.

Définition 3. La matrice d'une forme bilinéaire dans la base $\mathcal{B}$ de E est la matrice carrée $A = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$.

Remarque 4. φ est symétrique si et seulement si A est symétrique.

Théorème 5. Soit φ forme bilinéaire sur E , A sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Pour tout $x, y \in E$ on a $\varphi(x, y) = {}^t X A Y$ où X, Y sont les coordonnées de x, y dans $\mathcal{B}$.

Définition 6. On appelle forme quadratique sur E une application $q : E \rightarrow \mathbb{K}$; $x \mapsto \varphi(x, x)$ où φ est une forme bilinéaire sur E .

Remarque 7. Il n'y a pas d'unicité par exemple dans $\mathbb{R}^2$ $(x, y) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2$ et $(x, y) \mapsto x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_2$ définissent la même forme quadratique $q(x) = x_1^2 + x_2^2$.

Théorème 8. Si q forme quadratique sur E alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique telle que $q(x) = \varphi(x, x)$. Elle est appelée forme polaire associée à q .

Proposition 9. On peut retrouver la forme polaire associée à q grâce à la formule : $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$.

Définition 10. La matrice dans une base $\mathcal{B}$ de E d'une forme quadratique q est la matrice de sa forme polaire associée.

1.2 Orthogonalité et noyaux

On considère q une forme quadratique sur E et φ sa forme ours polaire associée.

Définition 11. Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits orthogonaux relativement à φ lorsque $\varphi(x, y) = 0$. Pour toute partie $X \subset E$, l'orthogonal de X est l'ensemble $X^\perp = \{y \in E | \varphi(x, y) = 0, \forall x \in X\}$.

Théorème 12. Si $\emptyset \neq X, Y \subset E$, alors $X^\perp$ est un sous espace vectoriel, $\emptyset^\perp = E$, $X \subset (X^\perp)^\perp$ et si $X \subset Y$ alors $Y^\perp \subset X^\perp$.

Définition 13. On dit que $x \in E$ est isotrope relativement à φ lorsqu'il est orthogonal à lui même, c'est-à-dire $q(x) = 0$. L'ensemble des vecteurs isotropes de E relativement à φ est appelé cône isotrope de φ .

Définition 14. On appelle noyau de φ (ou de q) l'orthogonal de E noté $\ker(\varphi) = E^\perp$.

Lemme 15. Le noyau de φ (ou de q) est contenu dans le cône isotrope de φ .

Définition 16. On dit que q est non dégénéré lorsque $\ker(q) = \{0\}$.

Proposition 17. q est non dégénéré si et seulement si sa matrice dans une base quelconque de E est inversible.

Définition 18. On dit que q est définie lorsque pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ on a $q(x) \neq 0$.

Définition 19. Si E est de dimension finie on appelle rang de q l'entier $rg(q) = n - \dim(\ker(q))$.

Remarque 20. q est non dégénéré si et seulement si $rg(q) = n$.

Théorème 21. On a $\dim(F) + \dim(F^\perp) \geq \dim(E)$ pour tout sev $F \subset E$ avec égalité si et seulement si q est non dégénéré. De plus $F \oplus F^\perp = E$ si et seulement si $q|_F$ est non dégénérée (si et seulement si $F \cap F^\perp = \{0\}$).

Théorème 22. Si q non dégénéré et le cône isotrope C_φ non réduit à $\{0\}$, alors il existe une base de E formée de vecteurs isotropes.

2 Classification

2.1 Réduction de Gauss

Théorème 23. (Réduction de Gauss) Pour toute forme quadratique non nulle q sur E , il existe $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, des scalaires non nuls $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ et des formes linéaires $(l_1, \dots, l_r)$ linéairement indépendantes telles que $q(x) = \sum_{j=1}^r \lambda_j l_j^2(x)$ pour tout $x \in E$.

Proposition 24. ALGORITHME DETAILLE A ECRIRE

Exemple 25.

Théorème 26. Avec les notations précédentes, il existe une base $(f_1, \dots, f_n)$ de E dans laquelle la matrice de q est diagonale.

Définition 27. Une telle base $(f_i)_i$ est dite q -orthogonale.

Théorème 28. Si E est de dimension finie alors il existe une base q -orthogonale de E .

Corollaire 29. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que tPAP est diagonale.

Théorème 30. Toujours avec ces notations on a $rg(q) = r$ et $\ker(q) = \{x \in E \mid l_1(x) = \dots = l_r(x) = 0\}$

2.2 Forme quadratique réelle

Définition 31. Une forme quadratique réelle q est positive (resp définie positive) lorsque $q(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$ (resp $q(x) > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$).

Lemme 32. (Cauchy-Schwarz) Si q est une forme quadratique positive, on a alors $\varphi(x, y) \leq q(x)q(y)$.

Lemme 33. Si q forme quadratique positive, alors $\ker(q) = C_q$ son noyau est son cône isotrope.

Théorème 34. (Sylvester) Soit ϕ une forme quadratique, il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $f_1, \dots, f_{p+q} \in E^*$ linéairement indépendantes avec $p + q \leq n$ tels que : $\phi = \sum_{i=1}^p |f_i|^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} |f_i|^2$. Le couple (p, q) est appelé signature de ϕ et ne dépend pas du choix des f_i , de plus $rg(\phi) = p + q$.

Théorème 35. En désignant par $\mathcal{P}$ (resp $\mathcal{N}$) l'ensemble des sev $F \subset E$ tels que la restriction $q|_F$ soit définie positive (resp définie négative), la signature (s, t) de q est donnée par : $s = \max_{F \in \mathcal{P}} \dim(F)$ si $\mathcal{P} \neq \emptyset$, $s = 0$ sinon et $t = \max_{F \in \mathcal{N}} \dim(F)$ si $\mathcal{N} \neq \emptyset$ et $t = 0$ sinon.

Exemple 36. $\phi(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx = (x + z)(y + t) = \frac{1}{4}[(x + y + z + t)^2 - (x + z - y - t)^2]$
La signature est $(1, 1)$ et donc le rang de ϕ est 2.

3 Décomposition matricielle

Définition 37. Les sous matrices principales de $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les matrices $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ pour k entre 1 et n et les mineurs principaux sont les $\Delta_k = \det(A_k)$

Théorème 38. (Sylvester) Une matrice symétrique est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

Corollaire 39. L'ensemble $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Lemme 40. Une matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ admet une décomposition $A = LU$ où L matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et U une triangulaire supérieure, si et seulement si tous les déterminants principaux de A sont non nuls. Lorsqu'elle existe une telle décomposition est unique.

Théorème 41. (Choleski) Une matrice réelle A est symétrique définie positive si et seulement si il existe une matrice B triangulaire inférieure et inversible telle que $A = B^t B$. De plus cette décomposition est unique si l'on impose que les coefficients diagonaux de B soient positifs.

Exemple 42. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ la matrice de Choleski est $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Dev 1 : Inertie de Sylvester 28 et 34
Dev 2 : Sylvester et Choleski 38 et 41

Références

- [GOU21] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Algèbre et probabilités. Ellipses, 2021.
- [GRI19] Joseph GRIFONE : Algèbre linéaire. Cepadues, 2019.
- [ROM17] JeanÉtienne ROMBALDI : Mathématiques pour l'Agrégation : Algèbre géométrie. De Boeck Supérieur, 2017.

RAPPORT DU JURY :

La leçon débute par une étude générale des formes quadratiques, indépendamment du corps. On peut, par exemple, adopter le point de vue de l'action par congruence du groupe linéaire sur l'espace des matrices symétriques, ce qui permet de dégager quelques invariants (rang, discriminant), de s'interroger sur le nombre et la structure des orbites. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être mis en oeuvre sur une forme quadratique simple. En ajout de la classification sur $\mathbb{R}$, le candidat pourra parler de la classification des formes quadratiques sur le corps des complexes. Il est aussi possible de s'intéresser à la classification sur les corps finis. On peut s'intéresser au groupe orthogonal (générateurs, structure du groupe quand l'espace est de dimension 2). Le lien avec la dualité des espaces vectoriels permet de comprendre le sens de la décomposition de Gauss et de comparer les notions de sous-espace orthogonal, en s'interrogeant sur

les conditions pour que l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel en soit un supplémentaire. La notion d'isotropie doit être connue. On pourra rattacher cette notion à la géométrie différentielle. Pour aller plus loin, on peut s'intéresser aux espaces hyperboliques, ou à l'étude de la géométrie d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'une forme quadratique de signature (p,q) , notamment la structure du cône de lumière de l'espace-temps de Minkowski, avec la traduction géométrique de la notion d'orthogonal dans ce cas et des propriétés du groupe $O(p,q)$.