

Leçon 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

1 Systèmes d'équation linéaires

1.1 Généralités

Définition 1. On appelle système linéaire de p équations à n inconnues :
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \quad \text{où } a_{ij}, b_j \in \mathbb{K}.$$

On appelle solution du système tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ dont les composantes satisfont toutes les équations. Le système est dit compatible lorsqu'il admet au moins une solution.

Le système peut s'écrire sous forme matricielle $AX = B$ avec $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,n \rrbracket} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $B = {}^t(b_1 \dots b_p) \in \mathcal{M}_{p,1}$ et $X = {}^t(x_1 \dots x_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

On appelle rang du système le rang de la matrice 1.

Définition 2. On appelle système homogène un système du type $AX = 0$.

Remarque 3. Un système homogène est toujours compatible (la solution nulle).

1.2 Systèmes de Cramer

Définition 4. On appelle système de Cramer un système linéaire dont la matrice A est carré et inversible.

Théorème 5. (Cramer) Un système de Cramer admet toujours une unique solution $x = (x_1, \dots, x_n)$ donnée par la formule suivante : $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$ où A_i est la matrice A à laquelle on a remplacé la i -ième colonne par B .

Exemple 6. Le système suivant est de Cramer :
$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 5 \end{cases}$$

En effet $\det(A) = -46$ et la solution est $(5, 1, 1)$.

Remarque 7. Le nombre d'opération pour résoudre un système de Cramer est de l'ordre de $n(n+1)!$.

Théorème 8. (Rouché-Fontené) On considère un système (S) de rang $r \geq 1$. Quitte à changer la numérotation ou l'ordre, on extrait

un mineur non nul d'ordre r noté $\delta = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$. On a alors :

1. Le système est compatible si et seulement si les déterminants ca-

ractéristiques associés à δ sont nuls $\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,r} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & b_r \\ a_{s1} & \dots & a_{sr} & b_s \end{vmatrix} =$

0 Pour $s \in \llbracket r+1, n \rrbracket$.

2. Si c'est le cas le système est équivalent au système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1,r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases} \quad \text{Il admet}$$

alors une infinité de solutions dépendantes de $n-r$ paramètres. Les solutions se calculent en résolvant le système de Cramer obtenu en donnant aux variables libres $(x_{r+1}, \dots, x_n)$ des valeurs arbitraires.

Exemple 9. Le système
$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y + 3z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \end{cases} \quad \text{admet pour solutions}$$
 $x = 2\lambda, y = 1 - 3\lambda, z = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Lemme 11. *Soient G un sous groupe de $GL(E)$, F le sous espace vectoriel engendré par G , $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p)$ une base de F extraite de G et $\varphi : G \rightarrow \mathbb{K}^p$; $u \mapsto (\text{tr}(u \circ u_1), \dots, \text{tr}(u \circ u_p))$. Si $u, v \in G$ sont tels que $\varphi(u) = \varphi(v)$ alors l'application $u \circ v^{-1} - \text{Id}$ est nilpotent. Si tous les éléments de G sont diagonalisables alors φ est injective.*

1. G est fini
2. G est d'exposant fini
3. $\text{tr}(G)$ est fini et tous ses éléments sont diagonalisables.

Proposition 13. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire ne change pas si l'on effectue sur les équations les "opérations élémentaires suivantes :*

1. Changer l'ordre des équations,
2. Multiplier une équation par un scalaire non nul,
3. Ajouter à une équation une combinaison linéaire des autres équations.

Exemple 15. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée mais

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ne l'est pas.}$$

Théorème 17. (*Méthode de l'élimination du Pivot de Gauss*)

- On se ramène à un système où $a_{11} \neq 0$,
- On échelonne le système en effectuant l'opération $L_i \mapsto a_{11}L_i - a_{i1}L_1$ pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

1. Si il présente une équation du type $0x_1 + \dots + 0x_n = b \neq 0$ alors le système n'a pas de solutions il est incompatible.
2. Sinon on réitère l'opération avec un nouveau pivot $a_{22} \neq 0$ jusqu'à obtenir un système échelonné dont la dernière ligne n'a qu'un élément non nul. De la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{1,r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots\dots\dots \\ a_{ps}x_s + \dots\dots\dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Les inconnues qui apparaissent au début de chaque équations sont dites inconnues principales, les autres (si il y en a) sont dites variables libres. Deux cas sont alors possibles :

- Soit il n'y a pas de variables libres $s = n$ et le système admet une unique solution que l'on obtient en remontant les équations.
- Soit il on donne des valeurs arbitraires $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n$ que l'on va enlever au second membre pour se ramener au cas précédent. Il y a donc une infinité de solutions.

Remarque 18. Il faut un nombre d'opérations de l'ordre de $\frac{2}{3}n^3$ pour résoudre un système par Pivot de Gauss.

Théorème 19. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Si le système sous forme échelonnée comporte k équations alors l'espace des solutions est de dimension $n - k$. En particulier un système homogène avec plus d'inconnues que d'équations admet des solutions non nulles.*

Remarque 20. La dimension de l'espace des solutions est égale au nombre de variables libres qui apparaissent dans la forme échelonnée.

Exemple 21. Le système $\begin{cases} x + 2y - 3z + t - w = 0 \\ x + 3y - 4z + w = 0 \\ 2x + 5y - 7z = 0 \end{cases}$ admet comme

base de solutions $(1, 1, 1, 0, 0), (-3, 1, 0, 1, 0), (5, -2, 0, 0, 1)$

Remarque 22. En pratique le pivot de Gauss permet de :

1. Déterminer si une famille est libre, génératrice ;
2. Déterminer des relations linéaires entre des vecteurs ;
3. Déterminer une base $F \cap G$ ou $F + G$;
4. Compléter une famille libre en base,

Exemple 23. 1. La famille $((1, 2, -3), (2, 3, -1), (3, 2, 1))$ est libre.

2. Pour $F = \text{Vect}((1, -1, 0, 2), (2, 1, 3, 1))$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (3, -4, 4, 2))$ on a $F \cap G = \text{Vect}(8, 1, 9, 7)$.

1.4 Décomposition matricielle

Définition 24. Les sous matrices principales de $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les matrices $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ pour k entre 1 et n et les déterminants principaux sont les $\Delta_k = \det(A_k)$

Théorème 25. Une matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ admet une décomposition $A = LU$ où L matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et U une triangulaire supérieure, si et seulement si tous les déterminants principaux de A sont non nuls. Lorsqu'elle existe une telle décomposition est unique.

Théorème 26. (Choleski) Une matrice réelle A est symétrique définie positive si et seulement si il existe une matrice B triangulaire inférieure et inversible telle que $A = B^t B$. De plus cette décomposition est unique si l'on impose que les coefficients diagonaux de B soient positifs.

Remarque 27. Résoudre le système $Ax = c$ revient à résoudre $Lw = c$ puis $Ux = w$.

Proposition 28. La méthode de Choleski nécessite environ $\frac{n^3}{3}$ opérations.

Exemple 29. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ la matrice de Choleski est $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2 Méthodes itératives

2.1 Généralités

Remarque 30. L'objectif est, pour un système $Ax = b$ avec A inversible, de construire une suite d'éléments qui va converger vers la

solution x du système. On écrit alors $A = M - N$ avec M facilement inversible et la résolution revient alors à trouver $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$ solution. On va faire des approximations successives en considérant la suite définie par $\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b \end{cases}$

Définition 31. Si A matrice réelle inversible, on dit que la méthode itérative associée à la décomposition $A = M - N$ est convergente lorsque pour tout $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ la suite $(x^{(k)})_k$ définie ci dessus est convergente.

Théorème 32. La méthode itérative associée à la décomposition $A = M - N$ est convergente si et seulement si le rayon spectral $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Proposition 33. Si il existe une norme matricielle telle que $\|M^{-1}N\| < 1$ alors la méthode itérative est convergente.

2.2 Méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel

Définition 34. La méthode de Jacobi est définie en prenant M la matrice diagonale des coefficients de A et $N = M - A$.

Théorème 35. Si A est à diagonale strictement dominante (lorsque pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{ii}| > \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$) alors la méthode de Jacobi est convergente.

Définition 36. La méthode de Gauss-Seidel est définie en prenant la M le triangle inférieur de A et $N = M - A$ l'opposé du triangle strictement supérieur de A .

Théorème 37. Si A est à diagonale strictement dominante alors la méthode de Gauss-Seidel est convergente.

Théorème 38. Si la matrice A est symétrique définie positive, alors la méthode de Gauss-Seidel est convergente.

Dev 1 : Critère de nilpotence et Burnside 10, 11 et 12
Dev 2 : Choleski et LU 25 et 26

Références

- [ALL05] Grégoire ALLAIRE : Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. Ecole polytechnique, 2005.
- [CAL22] Philippe CALDERO : Carnet de voyage en algèbre. Calvage et Mounet, 2022.
- [GRI19] Joseph GRIFONE : Algèbre linéaire. Cepadues, 2019.
- [ROM19] JeanÉtienne ROMBALDI : Analyse matricielle - Cours et exercices résolus : 2e édition. EDP Sciences, 2019.

RAPPORT DU JURY :

Dans cette leçon, les techniques liées au simple pivot de Gauss constituent l'essentiel des attendus. Il est impératif de faire le lien avec la notion de système échelonné (dont on donnera une définition précise et correcte) et de situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire, sans oublier la dualité. Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt algorithmique des méthodes présentées doit être expliqué, éventuellement en l'illustrant par des exemples simples (où l'on attend parfois une résolution explicite). Parmi les conséquences théoriques, les candidates et candidats peuvent notamment donner des systèmes de générateurs de $GL_n(K)$ et $SL_n(K)$. Ils est aussi pertinent de présenter les relations de dépendance linéaire sur les colonnes d'une matrice échelonnée qui permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de GL_n , K^* sur $M_n(K)$ donnée par $(P, A) \mapsto PA$. Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent exploiter les propriétés des systèmes d'équations linéaires pour définir la dimension des espaces vectoriels et obtenir une description de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels donnés par des systèmes générateurs, ou d'une somme de deux sous-espaces vectoriels donnés par des équations. De même, des discussions sur la résolution de systèmes sur $\mathbb{Z}$ et la forme normale de Hermite peuvent trouver leur place dans cette leçon. Enfin, il est possible de présenter les décompositions LU et de Choleski, en évaluant le coût de ces méthodes ou encore d'étudier la résolution de l'équation normale associée aux problèmes des moindres carrés et la détermination de la solution de norme minimale par la méthode de décomposition en valeurs singulières.