

Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

On considère $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

1 Généralités

1.1 Espace dual

Définition 1. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. L'ensemble $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Exemple 2. Pour $a, b \in \mathbb{K}$ l'application $(x, y) \mapsto ax + by$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^2$.

Proposition 3. Une forme linéaire non nulle est surjective.

Définition 4. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout $1 \leq i \leq n$ la forme linéaire e_i^* définie par $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ pour $1 \leq j \leq n$ est appelée forme linéaire coordonnée d'indice i .

Théorème 5. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E alors $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale de $\mathcal{B}$ et donc $\dim(E^*) = \dim(E) = n$. Pour tout $\varphi \in E^*$ on a $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$.

Définition 6. Le bidual de E est le dual de E^* noté E^{**} .

Théorème 7. L'application $\theta : E \rightarrow E^{**}; x \mapsto \theta_x : E^* \rightarrow E; \varphi \mapsto \theta_x(\varphi) = \varphi(x)$ est linéaire et injective. En dimension finie c'est donc un isomorphisme.

Théorème 8. Soit $\mathcal{B}'$ une base de E^* , alors il existe une unique base $\mathcal{B}$ de E dite anté-duale telle que $\mathcal{B}'$ soit la base duale de $\mathcal{B}$.

Exemple 9. (Interpolation de Lagrange) Dans $\mathbb{R}_n[X]$ soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ distincts alors les formes linéaires $\varphi_i : P \mapsto P(a_i)$ forment une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$ de base anté-duale $(L_0, \dots, L_n)$ où

$L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$. De plus pour $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, il existe un unique

$P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ donné par $P = \sum_{i=0}^n b_i L_i(X)$.

Théorème 10. (Représentation de Riesz) Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien alors pour toute forme linéaire f il existe $y \in E$ tel que $f = \langle y, \cdot \rangle$.

1.2 Hyperplans

Définition 11. On appelle hyperplan sur E le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Théorème 12. Un hyperplan de E est un sous espace de E supplémentaire d'une droite.

Exemple 13. Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ est un hyperplan de supplémentaire $i\mathbb{R}$.

Théorème 14. Lorsque E est de dimension finie n , un hyperplan est un sous espace de dimension $n - 1$.

Théorème 15. Si $\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi \in E^*$ telles que $\bigcap_{i=1}^p \ker(\varphi_i) \subset \ker(\varphi)$ alors φ est combinaison linéaire des φ_i .

Théorème 16. L'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*; M \mapsto [f_M : X \mapsto \text{tr}(MX)]$ est un isomorphisme.

Corollaire 17. Soit $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$, si f est telle que pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $f(XY) = f(YX)$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \text{tr}$.

Corollaire 18. Si $n \geq 2$ alors tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.

1.3 Orthogonalité

Définition 19. On dit que $\varphi \in E^*$ et $x \in E$ sont orthogonaux lorsque $\varphi(x) = 0$.

1. L'orthogonal de $X \subset E$ est $X^\perp = \{\varphi \in E^* | \forall x \in X, \varphi(x) = 0\} \subset E^*$.
2. L'orthogonal de $Y \subset E^*$ est $Y^\circ = \{x \in E | \forall \varphi \in Y, \varphi(x) = 0\} \subset E$.

Théorème 20. Soient $A, B \subset E$ parties non vides et $U, V \subset E^*$ parties non vides, alors on a :

1. Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$.
2. Si $U \subset V$ alors $V^\circ \subset U^\circ$.
3. $A \subset (A^\perp)^\circ$, l'égalité n'est généralement pas vraie.
4. $U \subset (U^\circ)^\perp$, l'égalité n'est généralement pas vraie.
5. $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$.
6. $U^\circ = (\text{Vect}(U))^\circ$.
7. $\{0\}^\perp = E^*$, $E^\perp = \{0\}$, $\{0\}^\circ = E$, $(E^*)^\circ = \{0\}$.

Théorème 21. On suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$, alors pour tout sous espace vectoriel F de E et G de E^* on a :

1. $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$.
2. $\dim(G) + \dim(G^\circ) = n$.
3. $F = (F^\perp)^\circ$ et $G = (G^\circ)^\perp$.
4. Pour F_1 et F_2 des sev de E on a $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$ et $(F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$.
5. Pour G_1 et G_2 des sev de E^* on a $(G_1 + G_2)^\circ = G_1^\circ \cap G_2^\circ$ et $(G_1 \cap G_2)^\circ = G_1^\circ + G_2^\circ$.

Théorème 22. Soit E de dimension finie $n \geq 2$ alors un sous espace vectoriel F est de dimension m si et seulement si il existe une famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ de rang $r = n - m$ telle que $F = \bigcap_{i=1}^p \ker(\varphi_i)$.

1.4 Transposition

Dans cette partie E et F sont des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels.

Définition 23. La transposée d'une application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est l'application ${}^t u : F^* \rightarrow E^*$; $\varphi \mapsto \varphi \circ u$.

Théorème 24. L'application de transposition $u \mapsto {}^t u$ est linéaire et injective de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(F^*, E^*)$.

Théorème 25. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors :

1. $\ker({}^t u) = (\text{Im}(u))^\perp$ donc u surjective si et seulement si ${}^t u$ surjective.
2. $\text{Im}({}^t u) = (\ker(u))^\perp$ donc u injective si et seulement si ${}^t u$ est injective.
3. $({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1})$

Théorème 26. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_m)$ base de F , si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est la matrice de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ alors la matrice de ${}^t u$ dans les bases duales $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{B}'^*$ est ${}^t A$.

2 Applications

2.1 Classification des formes quadratiques

Dans cette partie on suppose E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, ϕ une forme quadratique sur E et φ sa forme polaire associée.

Remarque 27. Pour tout $a \in E$ l'application $x \mapsto \varphi(a, x)$ est forme linéaire sur E .

Définition 28. Une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est dite q -orthogonale lorsque pour tout $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ on a $\varphi(e_i, e_j) = 0$.

Théorème 29. Si E est de dimension finie alors il existe une base q -orthogonale de E .

Théorème 30. (Sylvester) Soit ϕ une forme quadratique, il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $f_1, \dots, f_{p+q} \in E^*$ linéairement indépendantes avec $p + q \leq n$ tels que : $\phi = \sum_{i=1}^p |f_i|^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} |f_i|^2$. Le couple (p, q) est appelé signature de ϕ et ne dépend pas du choix des f_i , de plus $\text{rg}(\phi) = p + q$.

Exemple 31. $\phi(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx = (x + z)(y + t) = \frac{1}{4}[(x + y + z + t)^2 - (x + z - y - t)^2]$
La signature est $(1, 1)$ et donc le rang de ϕ est 2.

2.2 Calcul différentiel

On considère E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé de dimension finie et $U \subset E$ ouvert non vide.

Proposition 32. *Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$ alors $df(a)$ est une forme linéaire.*

Remarque 33. Si $E = \mathbb{R}^n$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produit scalaire canonique, alors $df(a)(x) = \langle \nabla f(a), x \rangle$ (par le théorème de représentation de Riesz).

Théorème 34. *Soient $f, g_1, \dots, g_r : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. SI $f|_\Gamma$ admet un extremum local en $c \in \Gamma$ et si $dg_1(c), \dots, dg_r(c)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ appelés multiplicateurs de Lagrange tels que $df(c) = \sum_{i=1}^r \lambda_i dg_i(c)$.*

Applications 35. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ avec égalité si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$.

Dev 1 : Dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ 16,17 et 18.

Dev 2 : Sylvester 29 et 30

Références

- [CAL22] Philippe CALDERO : Carnet de voyage en algèbre. Calvage et Mounet, 2022.
- [GOU21] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Algèbre et probabilités. Ellipses, 2021.
- [ROM17] JeanÉtienne ROMBALDI : Mathématiques pour l'Agrégation : Algèbre géométrie. De Boeck Supérieur, 2017.

RAPPORT DU JURY :

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon ; celle-ci permet de mettre en évidence des correspondances entre un morphisme et son morphisme transposé, entre un sous-espace et son orthogonal (canonique), entre les noyaux et les images ou entre les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent

être parfaitement connus. Le passage d'une base à sa base duale ou antéduale, ainsi que les formules de changement de base, doivent être maîtrisés. On pourra s'intéresser aux cas spécifiques où l'isomorphisme entre l'espace et son dual est canonique (cas euclidien, cas des matrices). Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Le lien avec la résolution des systèmes linéaires doit être fait. Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique ou analytique. Il faut que les développements proposés soient en lien direct avec la leçon. Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction à valeurs réelles est une forme linéaire semble incontournable.

Pour des candidates et candidats ayant une pratique de ces notions, il est possible d'illustrer la leçon avec un point de vue probabiliste, en rappelant que la loi d'un vecteur aléatoire X est déterminée par les lois unidimensionnelles de X_u pour tout vecteur u .