

Leçon 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

On considère $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel euclidien, u un endomorphisme de E .

1 Adjoint d'un endomorphisme

Théorème 1. Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ il existe un unique endomorphisme u^* appelé adjoint de u tel que pour tout $x, y \in E$ on ait $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$.

Proposition 2. Pour tout endomorphismes $u, v \in \mathcal{L}(E)$ on a :

1. $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$.
2. $(u^*)^* = u$.
3. $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
4. Si $u \in GL(E)$ alors $u^* \in GL(E)$ et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.
5. $\ker(u^*) = (\text{Im}(u))^\perp$ et $\text{Im}(u^*) = (\ker(u))^\perp$.
6. $\text{rg}(u^*) = \text{rg}(u)$.
7. Si F sev de E stable par u alors $F^\perp$ est stable par u^* .

2 Endomorphismes orthogonaux

2.1 Structure de groupe

Définition 3. Un isométrie de E est un endomorphisme qui conserve le produit scalaire, c'est à dire $u \circ u^* = u^* \circ u = \text{Id}_E$. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries de E .

Exemple 4. En dimension 1, on a $\mathcal{O}(E) = \{-\text{Id}, \text{Id}\}$.

Théorème 5. Une application $u : E \rightarrow E$ est une isométrie si et seulement si elle est linéaire et conserve la norme.

Exemple 6. Les symétries (endomorphismes vérifiant $u^2 = \text{Id}$ et tels qu'il existe $F, G \subset E$ tels que $F \perp G$ et $F \oplus G = E$ tels que $u|_F = -\text{Id}$ et $u|_G = \text{Id}$) sont des endomorphismes orthogonaux.

Théorème 7. Une isométrie est une bijection et $\mathcal{O}(E)$ est une sous groupe de $GL(E)$.

Proposition 8. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Si F est un sev stable par u alors $F^\perp$ est stable par u .

Théorème 9. $\mathcal{O}(E)$ est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$

Théorème 10. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A . L'application u est une isométrie si et seulement si ${}^tAA = A^tA = I_n$.

Corollaire 11. Pour toute isométrie $u \in \mathcal{O}(E)$ on a $\det(u) = 1$.

Théorème 12. $\mathcal{O}^+(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det(u) = 1\}$ est un sous groupe normal de $\mathcal{O}(E)$ d'indice 2.

2.2 Réduction

Lemme 13. Les seules valeurs propres réelles possibles d'une isométrie sont -1 et 1 .

Lemme 14. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Il existe des sev $P_1, \dots, P_r$ de E de dimension 1 ou 2 deux à deux orthogonaux, stables par u tels que $E = \bigoplus_{i=1}^r P_i$.

Théorème 15. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$, il existe une base orthonormée de E

dans laquelle la matrice de u s'écrit
$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & R_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & R_r \end{pmatrix} \text{ où on}$$

a noté $R_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}$ avec $\theta_k \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ et $p, q, r \in \mathbb{N}$ tels que $p + q + 2r = n$ (si l'un de ces entiers est nul, le bloc n'existe pas).

Corollaire 16. Les composantes connexes de $\mathcal{O}(E)$ sont les fermés $\mathcal{O}^+(E)$ et $\mathcal{O}^-(E)$.

3 Endomorphismes symétriques

3.1 Généralités

Définition 17. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique noté $u \in \mathcal{S}(E)$ (ou auto-adjoint) lorsque $u^* = u$ c'est-à-dire $\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

Exemple 18. Les projecteurs orthogonaux (endomorphismes vérifiant $u^2 = u$ tels qu'il existe $F, G \subset E$ tels que $F \perp G$ et $F \oplus G = E$ tels que $u|_F = 0$ et $u|_G = Id$) sont des endomorphismes symétriques.

Théorème 19. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.

Corollaire 20. $\mathcal{S}(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

3.2 Autour du théorème spectral

Lemme 21. Les valeurs propres d'un endomorphisme symétrique réel u sont toutes réelles.

Lemme 22. Pour $n \geq 2$. Si λ, μ sont des valeurs propres distinctes de u symétrique, alors les sous espaces propres E_λ et E_μ sont orthogonaux.

Théorème 23. (Spectral) Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée.

Théorème 24. Si A est symétrique positive, alors il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Lemme 25. Si A est symétrique alors sa norme induite par le produit scalaire euclidien est $\|A\| = \rho(A)$ son rayon spectral.

Théorème 26. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|A\| = \sqrt{\|{}^tAA\|} = \sqrt{\rho({}^tAA)}$.

Théorème 27. (Décomposition polaire) Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique $A = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Lemme 28. L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 29. Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 30. L'application $(\Omega, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto \Omega S \in GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

3.3 Endomorphismes définis positifs

Définition 31. Une matrice (endomorphisme) symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ($u \in \mathcal{S}(E)$) est dite positive (resp défini positive) lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il vérifie $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ (resp pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \langle Ax, x \rangle > 0$). On note ces ensembles $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 32. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On a $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (resp strictement positives).

Définition 33. Les sous matrices principales de $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les matrices $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ pour k entre 1 et n et les mineurs principaux sont les $\Delta_k = \det(A_k)$

Théorème 34. (Sylvester) Une matrice symétrique est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

Corollaire 35. L'ensemble $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Lemme 36. Une matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ admet une décomposition $A = LU$ où L matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et U une triangulaire supérieure, si et seulement si tous les déterminants principaux de A sont non nuls. Lorsqu'elle existe une telle décomposition est unique.

Théorème 37. (Choleski) Une matrice réelle A est symétrique définie positive si et seulement si il existe une matrice B triangulaire inférieure et inversible telle que $A = B^t B$. De plus cette décomposition est unique si l'on impose que les coefficients diagonaux de B soient positifs.

Exemple 38. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ la matrice de Choleski est $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Théorème 39. *L'exponentielle est un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.*

Théorème 40. *L'exponentielle est un homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.*

4 Endomorphismes normaux

Définition 41. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal lorsque $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Exemple 42. Les endomorphismes symétriques, antisymétriques ($u^* = -u$) et orthogonaux sont normaux.

Lemme 43. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, si F sev stable par u alors $F^\perp$ est stable par u .*

Lemme 44. *Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, il existe un sev P de dimension 1 ou 2 stable par u .*

Lemme 45. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, alors il existe des sev $P_1, \dots, P_r$ de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, stables par u et tels que $E = \bigoplus_{i=1}^r P_i$.*

Lemme 46. *Soit u endomorphisme normal d'un espace euclidien E de dimension 2. Si u admet une valeur propre réelle alors il est diagonalisable dans une base orthonormée. Sinon pour toute base orthonormée de E , la matrice de u est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.*

Théorème 47. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u s'écrit*

$$\begin{pmatrix} D_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & R_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_r \end{pmatrix} \text{ où } D_p \text{ est diagonale et où on a noté}$$

$R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ avec $b_k \neq 0$ et $p, q, r \in \mathbb{N}$ tels que $p + 2r = n$ (si l'un de ces entiers est nul, le bloc n'existe pas).

Corollaire 48. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ anti-symétrique. Toutes les valeurs propres de u sont imaginaires pures (ou nulles) et il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u s'écrit*

$$\begin{pmatrix} O_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & R_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_r \end{pmatrix} \text{ où } O_p \text{ est la matrice nulle et où on a noté}$$

$R_k = \begin{pmatrix} 0 & -b_k \\ b_k & 0 \end{pmatrix}$ avec $b_k \neq 0$ et $p, q, r \in \mathbb{N}$ tels que $p + 2r = n$ (si l'un de ces entiers est nul, le bloc n'existe pas).

Dev 1 : Décomposition polaire 27

Dev 2 : $\exp : S_n \rightarrow S_n^{++}$ est un homéomorphisme 39

Références

- [CAL22] Philippe CALDERO : Carnet de voyage en algèbre. Calvage et Mounet, 2022.
- [GOU21] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Algèbre et probabilités. Ellipses, 2021.
- [ROM17] JeanÉtienne ROMBALDI : Mathématiques pour l'Agrégation : Algèbre géométrie. De Boeck Supérieur, 2017.

RAPPORT DU JURY :

Dans cette leçon, le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Le théorème spectral pour les auto-adjoints et la réduction des endomorphismes orthogonaux sont des résultats incontournables. Le jury met les candidates et candidats en garde sur le fait que le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford ne sont pas des développements adaptés à cette leçon. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur. De même la réduction d'endomorphismes normaux peut être évoquée. L'étude des projections orthogonales

(en lien avec le calcul de distances), des rotations, des réflexions, des renversements, etc. fournit des exemples dignes d'intérêt. Une illustration pertinente peut s'appuyer sur la description de problèmes de moindres carrés en faisant ressortir le rôle de l'hypothèse de rang plein de A sur le caractère inversible de tAA .