

Leçon 157 : Matrices symétriques réelles. Matrices Hermitiennes.

Dans cette leçon on considère $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on pose $A^* = {}^t\bar{A}$. Pour E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base.

1 Généralités

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit les ensembles suivant :

1. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = A\}$ les matrices symétriques.
2. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = -A\}$ les matrices antisymétriques.
3. $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{A} = A\}$ les matrices hermitiennes.

Proposition 2. On a $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus i\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$. De plus on a $\dim(\mathcal{S}_n) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Corollaire 3. $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ est un sev du $\mathbb{R}$ ev $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension n^2 mais ce n'est pas un $\mathbb{C}$ sev.

Exemple 4.

1.2 Théorème spectral

Lemme 5. Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A sont toutes réelles.

Lemme 6. Pour $n \geq 2$. Si λ, μ sont des valeurs propres distinctes de A symétrique, alors les sous espaces propres E_λ et E_μ sont orthogonaux.

Théorème 7. (Spectral) Toute matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que tPAP est diagonale.

Théorème 8. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de matrices symétriques réelles. Ces matrices sont simultanément diagonalisables dans une base orthonormée si et seulement si les matrices A_i commutent 2 à 2.

Théorème 9. Si A est symétrique positive, alors il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Lemme 10. Si A est symétrique alors sa norme induite par le produit scalaire euclidien est $\|A\| = \rho(A)$ son rayon spectral.

Théorème 11. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|A\| = \sqrt{\|{}^tAA\|} = \sqrt{\rho({}^tAA)}$.

Théorème 12. L'exponentielle est un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 13. L'exponentielle est un homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

1.3 Endomorphismes

On considère $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Proposition 14. Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ il existe un unique endomorphisme u^* appelé adjoint de u tel que pour tout $x, y \in E$ on ait $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$.

Définition 15. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique noté $u \in \mathcal{S}(E)$ (ou auto-adjoint) lorsque $u^* = u$ c'est-à-dire $\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

Théorème 16. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.

Définition 17. Une matrice (endomorphisme) symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ($u \in \mathcal{S}(E)$) est dit positive (resp défini positive) lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il vérifie $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ (resp pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \langle Ax, x \rangle > 0$). On note ces ensembles $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 18. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On a $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (resp strictement positives).

1.4 Formes bilinéaires

Définition 19. Soient E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie, une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique (resp antisymétrique) sur E lorsque φ est linéaire pour la première variable et pour la deuxième variable et pour tout $(x, y) \in E^2$ on a $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (resp $\varphi(y, x) = -\varphi(x, y)$).

Proposition 20. Soit $\mathcal{B}$ une base de E , une forme bilinéaire φ sur E est symétrique (resp antisymétrique) si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique (resp antisymétrique). On a alors pour tout $x, y \in E$ en écrivant $X, Y \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, l'égalité $\varphi(x, y) = {}^t XMY$.

Définition 21. Une forme sesquilinéaire $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{C}$ sur un $\mathbb{C}$ -ev E est à symétrie hermitienne lorsque φ est linéaire pour la première variable et antilinéaire pour la seconde et pour tout $(x, y) \in E^2$ vérifie $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$.

Proposition 22. Soit $\mathcal{B}$ une base de E , une forme sesquilinéaire φ sur E est à symétrie hermitienne si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est hermitienne. On a alors pour tout $x, y \in E$ en écrivant $X, Y \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, l'égalité $\varphi(x, y) = {}^t XMY$.

Théorème 23. (Changement de base) Pour E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de changement de base. Si φ est une forme bilinéaire (resp sesquilinéaire) sur E , dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M et M' dans la base $\mathcal{B}'$. Alors on a $M' = {}^t PMP$ (resp $M' = {}^t \bar{P}MP$) on dit que les matrices sont congruentes.

2 Réduction et décomposition

2.1 Réduction de Gauss et Sylvester

Définition 24. Une forme quadratique sur E (resp hermitienne) est une application $q : E \rightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto \varphi(x, x)$ où φ est une forme bilinéaire symétrique (resp sesquilinéaire à symétrie hermitienne), appelée forme polaire de q .

Proposition 25. 1. La forme polaire de q quadratique se retrouve grâce à la formule : $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$.

2. La forme polaire de q hermitienne se retrouve grâce à la formule : $\varphi(x, y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y) + iq(x-iy) - iq(x+iy))$.

Définition 26. Le rang d'une forme quadratique q est le rang de sa forme polaire, c'est donc le rang de la matrice de φ dans une base de E .

Exemple 27. 1. Dans $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique $q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$ a pour matrice dans la base canonique $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Sur $\mathbb{C}^2$ la forme hermitienne $q(x, y) = \bar{x}x - 2\bar{y}y + \frac{3}{2}\bar{y}x + \frac{3}{2}y\bar{x}$ a pour matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$

Définition 28. Une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est dite q -orthogonale lorsque pour tout $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ on a $\varphi(e_i, e_j) = 0$.

Théorème 29. Si E est de dimension finie alors il existe une base q -orthogonale de E .

Corollaire 30. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^* = A$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que P^*AP soit diagonale.

Théorème 31. La décomposition de Gauss.

Théorème 32. (Sylvester) Soit ϕ une forme quadratique, il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $f_1, \dots, f_{p+q} \in E^*$ linéairement indépendantes avec $p + q \leq n$ tels que : $\phi = \sum_{i=1}^p |f_i|^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} |f_i|^2$.

Le couple (p, q) est appelé signature de ϕ et ne dépend pas du choix des f_i , de plus $rg(\phi) = p + q$.

Exemple 33. $\phi(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx = (x + z)(y + t) = \frac{1}{4}[(x + y + z + t)^2 - (x + z - y - t)^2]$
La signature est $(1, 1)$ et donc le rang de ϕ est 2.

2.2 Décomposition polaire

Théorème 34. *Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique $A = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.*

Lemme 35. *L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Théorème 36. *Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.*

Théorème 37. *L'application $(\Omega, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto \Omega S \in GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.*

2.3 Décomposition de Choleski

Définition 38. Les sous matrices principales de $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les matrices $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ pour k entre 1 et n et les mineurs principaux sont les $\Delta_k = \det(A_k)$

Théorème 39. *(Sylvester) Une matrice symétrique est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.*

Corollaire 40. *L'ensemble $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.*

Lemme 41. *Une matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ admet une décomposition $A = LU$ où L matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et U une triangulaire supérieure, si et seulement si tous les déterminants principaux de A sont non nuls. Lorsqu'elle existe une telle décomposition est unique.*

Théorème 42. *(Choleski) Une matrice réelle A est symétrique définie positive si et seulement si il existe une matrice B triangulaire inférieure et inversible telle que $A = B^t B$. De plus cette décomposition est unique si l'on impose que les coefficients diagonaux de B soient positifs.*

Exemple 43. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ la matrice de Choleski est $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Dev 1 : $\exp : S_n \rightarrow S_n^{++}$ est un homéomorphisme 12
Dev 2 : Sylvester et Choleski 39 et 42

Références

- [CAL22] Philippe CALDERO : Carnet de voyage en algèbre. Calvage et Mounet, 2022.
- [GOU21] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Algèbre et probabilités. Ellipses, 2021.
- [ROM17] JeanÉtienne ROMBALDI : Mathématiques pour l'Agrégation : Algèbre géométrie. De Boeck Supérieur, 2017.

RAPPORT DU JURY :

Le théorème spectral est indispensable dans cette leçon. Une place importante mérite d'être faite au cas particulier des matrices symétriques positives et définies positives ; les candidates et candidats doivent connaître leurs propriétés fondamentales, leur rôle, et la structure de leur ensemble. La notion de signature pourra être présentée en montrant comment elle détermine la classe de congruence d'une matrice symétrique réelle. L'action du groupe linéaire et du groupe orthogonal sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon. Le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes est incontournable. L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques.

Les candidates et candidats maîtrisant ces notions pourront illustrer la leçon en évoquant le cas des matrices de covariance de vecteurs aléatoires et discuter les conditions en assurant le caractère inversible, la décomposition de Cholesky, qui a de nombreuses applications pour le calcul scientifique (en lien avec la résolution de systèmes linéaires ou de problèmes de moindres carrés) ou en probabilités (construction d'un vecteur gaussien de matrice de covariance donnée à partir d'un vecteur gaussien de matrice de covariance identité), ou la décomposition en valeurs singulières d'une matrice (particulièrement importante pour le traitement massif de données).