

Leçon 156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

On considère $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, u un endomorphisme de E .

1 Endomorphismes trigonalisables

1.1 Rappels sur les polynômes d'endomorphismes

Définition 1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u lorsque $\ker(u - \lambda Id)$ n'est pas réduit à $\{0_{\mathbb{K}}\}$. L'ensemble des valeurs propre est appelé spectre de u et noté $Sp(u)$

Définition 2. Un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ est un vecteur $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Définition 3. Le sous espace propre de u associé à la valeur propre λ est le sous espace $E_{\lambda}(u) = E_{\lambda} = \ker(u - \lambda Id)$. La dimension de ce sous espace propre est noté $m_g(\lambda)$ est appelé multiplicité géométrique de λ .

Proposition 4. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes deux à deux distinctes est libre.

Exemple 5. Le résultat est vrai même en dimension infinie, par exemple pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $f_a : x \mapsto e^{ax}$ est un vecteur propre de l'opérateur de dérivation dans $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$. Ainsi pour tous réels deux à deux distincts la famille $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$ est libre.

Corollaire 6. Un endomorphisme de d'un espace vectoriel de dimension n admet au plus n valeurs propres distinctes.

Définition 7. Le polynôme caractéristique de u est $\chi_u(X) = \det(XI_n - u)$. Il ne dépend pas de la base de E choisie.

Proposition 8. Soit F un sous espace de E stable par u . Alors le polynôme caractéristique $\chi_{u_F}(X)$ de l'endomorphisme induit divise $\chi_u(X)$.

Proposition 9. Les racines de $\chi_u(X)$ sont exactement les valeurs propres de u .

Définition 10. On appelle multiplicité algébrique d'une valeur propre λ , notée $m_a(\lambda)$ la multiplicité de la valeur propre dans $\chi_u(X)$.

Théorème 11. (Lemme des noyaux) Soit $(P_1, \dots, P_N)$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux, alors :

$$\ker(P_1 \dots P_N)(u) = \bigoplus_{k=1}^N \ker(P_k(u))$$

De plus les projecteurs de $\ker(P_1 \dots P_N)(u)$ sur l'un de ces sous espaces parallèlement aux autres sont des polynômes en u .

Théorème 12. (Cayley-Hamilton) Le polynôme caractéristique χ_u de u est annulateur de u .

1.2 Trigonalisation

Définition 13. Un endomorphisme u est trigonalisable lorsqu'elle il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire.

Proposition 14. L'endomorphisme u est trigonalisable sur $\mathbb{K}$, si et seulement si il admet un polynôme annulateur est scindé sur $\mathbb{K}$.

Définition 15. On appelle drapeau de E une suite croissante de sous espaces vectoriels $\{0_E\} = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_r \subset E$. Il est dit complet lorsqu'il est formé de $n + 1$ sous espaces et que $\dim(E_i) = i$

Théorème 16. u est trigonalisable si et seulement si il existe un drapeau complet stable par u .

Exemple 17. Pour $E = \mathbb{R}_n[X]$, un drapeau complet est constitué des $E_i = \mathbb{R}_i[X]$. Ainsi un endomorphisme est trigonalisable si il diminue (au sens large) le degré du polynôme. Ainsi $P \mapsto P'$ et $P(X) \mapsto P(X + 1)$ sont trigonalisables.

Théorème 18. *L'endomorphisme u est trigonalisable sur $\mathbb{K}$, si et seulement si son polynôme caractéristique (resp minimal) est scindé sur $\mathbb{K}$.*

Corollaire 19. *Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors tout endomorphisme u est trigonalisable.*

Corollaire 20. *Soit F un sous espace stable par u , si u est trigonalisable alors u_F est trigonalisable.*

Corollaire 21. *Si un endomorphisme u (resp matrice A) est trigonalisable, la trace de u (resp de A) est la somme de ses valeurs propres et le déterminant de u (resp de A) est le produit de ses valeurs propres.*

Exemple 22. Dans $\mathbb{R}$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos(\theta) & -2\cos(\theta) \\ 0 & 2\cos(\theta) & -2\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

n'est pas trigonalisable

1.3 Co-trigonalisation

Définition 23. Une famille d'endomorphisme $(u_1, \dots, u_N)$ est co-trigonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle chacun des u_k pour $k \in \{1, \dots, N\}$ admet une matrice triangulaire.

Proposition 24. *Soient $u_1, \dots, u_N$ des endomorphismes qui commutent tous deux à deux entre eux, alors la famille $(u_1, \dots, u_N)$ est co-trigonalisable.*

2 Endomorphismes nilpotents

Définition 25. Un endomorphisme u est dit nilpotent lorsqu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{q-1} \neq 0$ et $u^q = 0$. on dit que q est l'indice de nilpotence de u

Lemme 26. *Si u est nilpotent, alors 0 est valeur propre et $\text{Tr}(u) = 0$.*

Théorème 27. *Pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos, u est nilpotent si et seulement si 0 est l'unique valeur propre de u .*

Théorème 28. *Un endomorphisme u est nilpotent si et seulement si son polynôme caractéristique est X^n .*

Corollaire 29. *Un endomorphisme u est nilpotent si et seulement si son polynôme minimal est X^q .*

Corollaire 30. *Si u est nilpotent et F sous espace stable par u alors u_F est nilpotent.*

Définition 31. La suite des noyaux itérés est la suite des sous-espaces vectoriels $(\ker(u^q))_{q \geq 0}$

Proposition 32. — *La suite des noyaux itérés est croissante pour l'inclusion.*

- *S'il existe un $r \in \mathbb{N}$ tel que $\forall q \geq r, \ker(u^q) = \ker(u^{r+1})$, alors pour tout $q \geq r$, on a $\ker(u^q) = \ker(u^r)$.*
- *Si E est de dimension finie, il existe un plus petit entier naturel r tel que $\ker(u^r) = \ker(u^{r+1})$. Cet entier est appelé indice de l'endomorphisme u . On a alors aussi $\text{Im}(u^q) = \text{Im}(u^r)$ pour tout $q \geq r$, et la décomposition en somme directe $\ker(u^r) \oplus \text{Im}(u^r) = E$.*
- *Si on note d_k la dimension de $\ker(u^k)$, alors $\forall k \geq 0, d_{k+1} - d_k \geq d_{k+2} - d_{k+1}$, autrement dit la suite de la différence des dimensions entre deux noyaux itérés consécutifs est décroissante.*

Théorème 33. (Décomposition de Fitting) *Il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $E = \ker(u^m) \oplus \text{Im}(u^m)$.*

Théorème 34. *Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, alors u est nilpotent si et seulement si $\text{Tr}(u^k) = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.*

Proposition 35. *Si u est diagonalisable et nilpotent alors $u = 0$.*

3 Applications

3.1 Décomposition de Dunford

Notation 36. On suppose que le polynôme minimal de u est scindé

$\mu_u = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\beta_k}$ où les λ_k sont les valeurs propres distinctes de u et

$\beta_k \in \mathbb{N}^*$, le polynôme caractéristique s'écrit alors $\chi_u = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$

avec $1 \leq \beta_k \leq \alpha_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$.

Définition 37. Avec ces notations on appelle sous espace caractéristique de u les sous espaces vectoriels $\ker(u - \lambda_k Id)^{\alpha_k}$ avec $k \in \{1, \dots, r\}$.

Théorème 38. Soit $P(X) = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_k}$ un polynôme annulateur de u avec $m_k \geq \beta_k$, on pose $N_k := \ker(u - \lambda_k)^{m_k}$. On a alors :

- $E = \bigoplus_{k=1}^p N_k$;
- $N_k = \ker(u - \lambda_k Id)^{\beta_k}$ où β_k est la multiplicité comme racine de μ_u ;
- N_k est stable par u et λ_k est la seule valeur propre de la restriction de u à N_k ;
- $\dim(N_k) = \alpha_k$ où α_k est la multiplicité comme racine de χ_u ;
- La restriction de $u - \lambda_k Id$ à N_k est nilpotente d'indice β_k .

Théorème 39. (Dunford) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec χ_u scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que d soit diagonalisable, n soit nilpotent, d et n commutent et $u = d + n$. De plus d et n sont des polynômes en u .

Définition 40. La série entière $\sum \frac{z^k}{k!}$ ayant un rayon de convergence infini, la série $\sum \frac{1}{k!} u^k$ est convergente pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$. Sa somme est appelée exponentielle de u et notée $\exp(u) = e^u$.

Théorème 41. Si $u = d + n$ est la décomposition de Dunford de u , alors celle de e^u est donnée par $e^u = e^d + e^d(e^n - Id)$ avec e^d diagonalisable et $e^d(e^n - Id)$ nilpotente.

Corollaire 42. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors u est diagonalisable si et seulement si e^u est diagonalisable

3.2 Burnside et les nilpotents

Lemme 43. Soient G un sous groupe de $GL(E)$, F le sous espace vectoriel engendré par G , $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p)$ une base de F extraite de G et $\varphi : G \rightarrow \mathbb{K}^p$; $u \mapsto (tr(u \circ u_1), \dots, tr(u \circ u_p))$. Si $u, v \in G$ sont tels que $\varphi(u) = \varphi(v)$ alors l'application $u \circ v^{-1} - Id$ est nilpotent. Si tous les éléments de G sont diagonalisables alors φ est injective.

Théorème 44. (Burnside) Soit G un sous groupe de $GL(E)$, on a les équivalences suivantes :

1. G est fini
2. G est d'exposant fini
3. $tr(G)$ est fini et tous ses éléments sont diagonalisables.

Dev 1 : Critère de nilpotence et Burnside 34 43 et 44
Dev 2 : DUNFORD 39 42

Références

- [GOU21] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Algèbre et probabilités. Editions Ellipses, 2021.
- [RM16] Rached MNEIMNE ROGER MANSUY : Algèbre linéaire : réduction des endomorphismes : cours exercices corrigés : licence mathématiques, classes préparatoires scientifiques. Vuibert, 2016.
- [ROM17] Jean Etienne ROMBALDI : Mathématiques pour l'Agrégation : Algèbre géométrie. De Boeck Supérieur, 2017.

RAPPORT DU JURY :

Il est indispensable de connaître les polynômes caractéristiques et minimaux d'un endomorphisme nilpotent et de savoir justifier son caractère trigonalisable. Il est bon de savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme trigonalisable (respectivement

nilpotent) sur un sous-espace stable est encore trigonalisable (respectivement nilpotent). L'utilisation des noyaux itérés est fondamentale dans cette leçon, par exemple pour déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables. Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée ; l'étude des endomorphismes cycliques a toute sa place dans cette leçon. L'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Jordan ou la décomposition de Frobenius, ou des caractérisations topologiques des endomorphismes nilpotents, ou encore des propriétés topologiques de l'ensemble des endomorphismes nilpotents.