

Leçon 155 : Exponentielle de matrices. Applications

On considère $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1 Construction et propriétés

1.1 Norme d'algèbre et série entière

Définition 1. Pour toute norme $\|\cdot\|$ définie sur $\mathbb{K}^n$ on définit la norme matricielle induite par $\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 2. L'algèbre $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|\cdot\|)$ est une algèbre de Banach $((\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|\cdot\|)$ est un EVN complet et pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$).

Définition 3. On appelle spectre de A noté $sp(A)$ l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ valeurs propres de A . On désigne par $\rho(A) = \max_{\lambda \in sp(A)} (|\lambda|)$ le rayon spectral de A .

Proposition 4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a $sp(A^k) = sp(A)^k$ donc $\rho(A^k) = \rho(A)^k$ et $\rho(A) \leq \|A\|$.

Définition 5. On note $\mathbb{K}[A]$ la sous algèbre commutative et unitaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ évalués en A .

Théorème 6. Soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et f sa fonction somme.

1. Si $\rho(A) < R$ alors la série $\sum a_k A^k$ est normalement convergente. De plus $f(A) \in \mathbb{K}[A]$.
2. Si $\rho(A) > R$ alors la série $\sum a_k A^k$ est divergente.

1.2 Propriétés

Proposition 7. La série $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 8. On appelle exponentielle de matrice la somme de la série ci-dessus et on la note pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme $\exp(A) =$

$$e^A = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Théorème 9. La fonction $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue et $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 10. On a les propriétés suivantes :

1. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$, donc A et $\exp(A)$ commutent.
2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a ${}^t(\exp(A)) = \exp({}^tA)$ et $\overline{\exp(A)} = \exp(\overline{A})$.
3. Si $A = PBP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $\exp(A) = P \exp(B) P^{-1}$.
4. On a $\det(\exp(A)) = \exp(\text{Tr}(A))$.
5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent alors $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$.
6. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.

Exemple 11. Il est impératif que les matrices commutent pour avoir (5). Par exemple avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a $\exp(A) \exp(B) = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e & e^{-1} \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} = \exp(B) \exp(A)$

Théorème 12. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors A et B commutent si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\exp(t(A + B)) = \exp(tA) \exp(tB)$.

Théorème 13. La fonction $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour

$$\text{tout } X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ on a } d(\exp)(X)(H) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{\substack{0 \leq i, j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} X^i H X^j \right)$$

Exemple 14. La fonction $\exp$ est différentiable en 0 de différentielle $d\exp_0 = Id$

Proposition 15. La fonction $\exp$ induit un C^1 difféomorphisme d'un voisinage de $O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ sur un voisinage de I_n dans $GL_n(\mathbb{K})$.

2 Étude de la fonction

2.1 Calcul pratique

Proposition 16. Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{N^k}{k!}.$$

Théorème 17. (Lemme des noyaux) Soit $(P_1, \dots, P_N)$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux, alors :

$$\ker(P_1 \dots P_N)(u) = \bigoplus_{k=1}^N \ker(P_k(u))$$

De plus les projecteurs de $\ker(P_1 \dots P_N)(u)$ sur l'un de ces sous espaces parallèlement aux autres sont des polynômes en u .

Théorème 18. (Dunford) Soit A une matrice possédant un polynôme annulateur scindé. Alors il existe un unique couple de matrices (D, N) tels que $A = D + N$, N et D commutent, N est nilpotente, D est diagonalisable. De plus $D, N \in \mathbb{K}[A]$.

Lemme 19. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = P(\exp(A))$.

Remarque 20. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ce n'est plus vrai, par exemple avec $A = \text{diag}(0, 2i\pi)$ dont l'exponentielle est scalaire.

Proposition 21. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices diagonalisables admettant la même exponentielle, alors $A = B$.

Proposition 22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A = D + N$ sa décomposition de Dunford. Alors la décomposition de Dunford de $\exp(A)$ est donnée par $\exp(A) = \exp(D) + \exp(D)(\exp(N) - I_n)$

Proposition 23. Supposons que $\chi_A(X)$ soit scindé, alors A est diagonalisable si et seulement si $\exp(A)$ est diagonalisable.

2.2 Surjectivité et injectivité

Proposition 24. L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Remarque 25. Pour $n \geq 2$ l'application $\exp$ n'est pas injective sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En effet $\exp\left(2\pi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} = \exp(I_2)$.

Proposition 26. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables telles que $\exp(A) = \exp(B)$ alors $A = B$.

Proposition 27. L'image d'une matrice réelle par la fonction $\exp$ est de déterminant strictement positif.

Lemme 28. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, alors il existe $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $Q(A)$ soit diagonalisable et $A = \exp(Q(A))$.

Corollaire 29. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$ il existe $X \in \mathbb{C}[A]$ telle que $X^p = A$.

Théorème 30. On a $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{M^2 \mid M \in GL_n(\mathbb{R})\}$

3 Applications

3.1 Topologie

Proposition 31. Soit $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\|A\| = \sqrt{\rho({}^tAA)}$.

Proposition 32. L'espace $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arc.

Théorème 33. L'exponentielle est un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 34. L'exponentielle est un homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

3.2 Équations Différentielles Linéaires

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non réduit à un point.

Définition 35. Un système différentiel linéaire est une équation $Y' = A(t)Y + B(t)$ d'inconnue $Y : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et de coefficients $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de second membre $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Proposition 36. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ alors le système homogène à coefficients constants $Y' = AY$ admet exactement une solution vérifiant $Y(0) = Y_0$ et cette solution est $t \mapsto \exp(tA)Y_0$.

Lemme 37. La fonction vectorielle $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable de dérivée $t \mapsto A \exp(tA) = \exp(tA)A$

Exemple 38. TROUVER UN EXEMPLE

Dev 1 : $\exp : S_n \rightarrow S_n^{++}$ est un homéomorphisme 33

Dev 2 : Dunford 18, 22 et 23

Références

- [BER21] Florent BERTHELIN : Équations différentielles. Cassini, 2021.
- [CAL22] Philippe CALDERO : Carnet de voyage en algèbre. Calvage et Mounet, 2022.
- [GOU21] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Algèbre et probabilités. Ellipses, 2021.
- [PC17] Jérôme GERMONI PHILIPPE CALDERO : Histoires hédonistes de groupes et de géométries. Calvage et Mounet, 2017.
- [17] Jean Étienne ROMBALDI : Mathématiques pour l'Agrégation : Algèbre géométrie. De Boeck Supérieur, 2017.

RAPPORT DU JURY :

Bien que ce ne soit pas une leçon d'analyse, il faut savoir justifier précisément la convergence de la série exponentielle. Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées en distinguant les cas réel et complexe. Il est souhaitable de connaître l'image par exponentielle de certains sous-ensembles de matrices (ensemble des matrices symétriques, hermitiennes, ou antisymétriques). La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp A$ trouve toute son utilité dans cette leçon. L'exponentielle en lien avec la décomposition polaire peut s'avérer utile dans l'étude de sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) peut être menée dans cette leçon. Les applications aux équations différentielles méritent d'être présentées sans toutefois constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple

faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidates et candidats de proposer ce thème dans un développement de cette leçon, sauf à avoir bien compris comment les apports algébriques permettent ici de simplifier les conclusions analytiques.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'aventurer vers les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire (on peut alors voir si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $GL(n, \mathbb{R})$ ou vers les algèbres de Lie.