

Leçon 153 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres.

Applications.

On considère $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , f un endomorphisme de E .

1 Valeurs propres et vecteurs propres

1.1 Généralités

Définition 1. — Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, on dit que α est valeur propre de f lorsque $E_\alpha = \ker(f - \alpha Id) \neq \{0\}$.

— On appelle spectre de f noté $Sp(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f .

— On appelle rayon spectral le réel $\rho(f) = \max_{\lambda \in Sp(f)} |\lambda|$

— Un élément $x \in E_\alpha$ est appelé vecteur de f associé à α et E_α est appelé sous espace propre de f associé à α .

Théorème 2. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes de f . Alors les sous espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe.

A partir de maintenant on identifie un endomorphisme f à sa matrice dans la base canonique noté $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 3. On appelle polynôme caractéristique de $a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le polynôme $\chi_A(X) = \det(A - I_n)$.

Remarque 4. Le polynôme caractéristique $\chi_f(X)$ de f ne dépend pas du choix de la base.

Proposition 5. $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f si et seulement si $\chi_f(\lambda) = 0$.

Définition 6. Pour tout vecteur non nul $x \in E$ on pose $I_{u,x} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0\}$. C'est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par $\mu_{u,x}$ de degré $p_{u,x}$. On pose aussi $E_{u,x} = Vect(\{u^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\})$.

Lemme 7. $E_{u,x}$ est un sous espace vectoriel de dimension $p_{u,x}$ de E stable par u . Le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de la restriction de u à $E_{u,x}$ sont égaux.

Théorème 8. (Cayley-Hamilton) Le polynôme caractéristique χ_u de u est annulateur de u .

Corollaire 9. Le polynôme minimal μ_u divise le polynôme caractéristique χ_u donc $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\mu_u) \leq n$

1.2 Réduction

Définition 10. — Un endomorphisme u est trigonalisable lorsqu'elle il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire.

— Un endomorphisme u est diagonalisable lorsqu'elle il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

Théorème 11. L'endomorphisme u est trigonalisable sur $\mathbb{K}$, si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 12. Si un endomorphisme u (resp matrice A) est trigonalisable, la trace de u (resp de A) est la somme de ses valeurs propres et le déterminant de u (resp de A) est le produit de ses valeurs propres.

Proposition 13. Si u possède n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$, alors u est diagonalisable.

Applications 14. Lorsque l'on sait diagonaliser une matrice on peut calculer facilement ses puissances. Il suffit d'écrire $A = PDP^{-1}$ et dans ce cas on aura $A^k = PD^kP^{-1}$.

Théorème 15. (Dunford) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec χ_u scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que d soit diagonalisable, n soit nilpotent, d et n commutent et $u = d + n$. De plus d et n sont des polynômes en u .

Théorème 16. (Spectral) Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée et ses valeurs propres sont toutes réelles.

Définition 17. La série entière $\sum \frac{z^k}{k!}$ ayant un rayon de convergence infini, la série $\sum \frac{1}{k!} u^k$ est convergente pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$. Sa somme est appelée exponentielle de u et notée $\exp(u) = e^u$.

Théorème 18. Si $u = d + n$ est la décomposition de Dunford de u , alors celle de e^u est donnée par $e^u = e^d + e^d(e^n - \text{Id})$ avec e^d diagonalisable et $e^d(e^n - \text{Id})$ nilpotente.

Corollaire 19. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors u est diagonalisable si et seulement si e^u est diagonalisable

Définition 20. Un endomorphisme u est dit nilpotent lorsqu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{q-1} \neq 0$ et $u^q = 0$. on dit que q est l'indice de nilpotence de u

Lemme 21. Si u est nilpotent, alors 0 est valeur propre et $\text{Tr}(u) = 0$.

Théorème 22. Pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos, u est nilpotent si et seulement si 0 est l'unique valeur propre de u .

Proposition 23. Soit $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ $\text{tr}(u^k) = 0$.

Lemme 24. Soient G un sous groupe de $GL(E)$, F le sous espace vectoriel engendré par G , $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p)$ une base de F extraite de G et $\varphi : G \rightarrow \mathbb{K}^p$; $u \mapsto (\text{tr}(u \circ u_1), \dots, \text{tr}(u \circ u_p))$. Si $u, v \in G$ sont tels que $\varphi(u) = \varphi(v)$ alors l'application $u \circ v^{-1} - \text{Id}$ est nilpotent. Si tous les éléments de G sont diagonalisables alors φ est injective.

Théorème 25. (Burnside) Soit G un sous groupe de $GL(E)$, on a les équivalences suivantes :

1. G est fini
2. G est d'exposant fini
3. $\text{tr}(G)$ est fini et tous ses éléments sont diagonalisables.

1.3 Matrices remarquables

Définition 26. Soit $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on appelle ma-

trice compagnon de P la matrice notée $C_p = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Théorème 27. Un polynôme unitaire P est polynôme minimal et polynôme caractéristique de sa matrice compagnon C_p .

Théorème 28. La matrice compagnon C_p est diagonalisable si et seulement si P est scindé à racine simples. Dans ce cas en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres on a $WC_p W^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où

$$W = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Définition 29. Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique lorsque tous ses coefficients sont positifs et pour tout

$i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$. On note $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques.

Théorème 30. *L'ensemble $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ est convexe, compact et stable par produit. Toute matrice stochastique a un rayon spectral de 1 et ce rayon spectral est la seule valeur propre admettant des vecteurs propres strictement positifs.*

Exemple 31. (Déterminant Circulant) Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $P = \alpha_n X^{n-1} + \dots + \alpha_2 X + \alpha_1$ on a alors

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega^i)$$

Applications 32. Soient $\mathcal{P} = (z_1, \dots, z_n)$ un polynôme à n sommets et $a, b \in]0, 1[$ tels que $a + b = 1$. La suite vectorielle définie par $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_{k+1} = (ap_{k,1} + bp_{k,2}, \dots, ap_{k,n} + bp_{k,1})$ où $\mathcal{P}_k = (p_{k,1}, \dots, p_{k,n})$ converge vers l'isobarycentre de $\mathcal{P}$.

2 Recherche approchée de valeurs propres

2.1 Normes matricielles et convergence

Définition 33. Si $(E, \|\cdot\|)$ est un EVN, on lui associe une norme matricielle induite. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on pose $\|A\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|Ax\|$.

On pose aussi pour $1 \leq i \leq n$ les valeurs $L_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$, $L = \max_{1 \leq i \leq n} \{L_i + |a_{ii}|\}$ et pour $1 \leq j \leq n$ on pose $C_j = \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|$ et $C = \max_{1 \leq i \leq n} \{C_i + |a_{ii}|\}$.

Théorème 34. (Gerschgorin) *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A . Il existe un indice $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|\lambda - a_{ii}| \leq L_i$.*

Corollaire 35. *Pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A , on a $|\lambda| \leq \min(L, C)$.*

Théorème 36. *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\|A\|_2 = \sqrt{\|A^*A\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)}$.*

Théorème 37. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a :*

1. *Pour toute norme matricielle induite on a $\rho(A) \leq \|A\|$.*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme matricielle induite telle que $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$.*
3. *$\rho(A) = \inf_{\|\cdot\| \in \mathcal{N}} \|A\|$ où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des normes matricielles induites.*

Théorème 38. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$;*
2. *Pour tout $x_0 \in \mathbb{C}^n$, la suite $(x_k)_k$ définie par $x_{k+1} = Ax_k$ converge vers le vecteur nul ;*
3. *$\rho(A) < 1$;*
4. *$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(A^k) = 0$*

2.2 Méthodes itératives

Méthode 39. (de la puissance) On veut calculer la plus petite valeur propre simple d'une matrice et un vecteur propre associé. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont la plus grande valeur propre est λ_n . On procède de la manière suivante :

On prend $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x_0\| = 1$.

Pour tout $k \geq 1$ on pose $y_k = Ax_{k-1}$ et $x_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$. Lorsque $\|x_k - x_{k-1}\| < \varepsilon$ généralement $\varepsilon = 10^{-6}$ on s'arrête et dans ce cas x_k est un vecteur propre de la valeur propre approchée $\|y_k\|$.

Méthode 40. (de la puissance inverse) On veut calculer la plus grande valeur propre simple d'une matrice et un vecteur propre associé. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont la plus grande valeur propre est λ_n . On procède de la manière suivante :

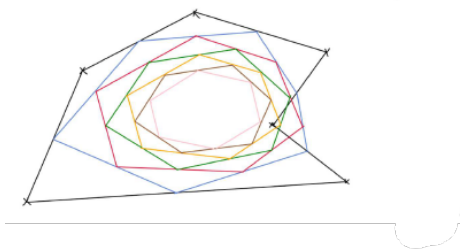
On prend $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x_0\| = 1$.

Pour tout $k \geq 1$ on résout $Ay_k = x_{k-1}$ et $x_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$. Lorsque $\|x_k - x_{k-1}\| < \varepsilon$ généralement $\varepsilon = 10^{-6}$ on s'arrête et dans ce cas x_{k-1} est un vecteur propre de la valeur propre approchée $\frac{1}{\|y_k\|}$.

Remarque 41. Une condition suffisante pour que ces méthodes convergent est que le vecteur x_0 ne soit pas orthogonal à un vecteur propre de la valeur propre recherchée.

3 Annexe

FIGURE 2: Suite de polygones



Suite de polygones

Dev 1 : Critère de nilpotence et Burnside 23, 24 et 25

Dev 2 : Suites de polygones 31 et 32

Dev 3 : Dunford 15 et 19

Références

- [ALL05] Grégoire ALLAIRE : Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. Ecole polytechnique, 2005.
- [CAL22] Philippe CALDERO : Carnet de voyage en algèbre. Calvage et Mounet, 2022.
- [GOU21] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Algèbre et probabilités. Editions Ellipses, 2021.
- [ROM17] Jean Etienne ROMBALDI : Mathématiques pour l'Agrégation : Algèbre géométrie. De Boeck Supérieur, 2017.
- [ROM21] Jean Etienne ROMBALDI : Analyse matricielle - Cours et exercices résolus : 2e édition. EDP Sciences, 2021.

RAPPORT DU JURY :

Cette leçon doit aborder le bagage théorique propre aux vecteurs propres et aux valeurs propres et mettre en lumière l'exploitation de techniques d'algèbre ou d'analyse pour aborder leur recherche. Après avoir exploré la détermination théorique exacte des éléments

propres, on s'intéresse à des exemples de matrices dont les éléments propres sont remarquables (matrices compagnons, matrices circulantes, matrices d'ordre fini, matrices stochastiques...) et donne des exemples de situations où la connaissance d'éléments propres s'avère utile. On doit connaître les limites du calcul exact, même si le cadre mathématique nécessaire est non exigible et hors programme, et introduire sur Rou Cune ou plusieurs méthodes itératives, dont on démontre la convergence. On peut citer les méthodes de la puissance, puissance inverse et QR pour la recherche d'éléments propres. Les notions de norme matricielle, de rayon spectral doivent être maîtrisées. Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu et illustré. On peut aussi s'intéresser à la localisation des valeurs propres.

Pour aller plus loin, on peut aborder la problématique du conditionnement en distinguant le problème général et le cas particulier des matrices auto-adjointes, s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être faits avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide, ainsi qu'au comportement de la suite des itérées de matrices stochastiques ou plus généralement de matrices à coefficients positifs, au moins dans des cas particuliers.