

Leçon 152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

On considère $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, u un endomorphisme de E .

1 Généralités

1.1 Prérequis

Définition 1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u lorsque $\ker(u - \lambda Id)$ n'est pas réduit à $\{0_{\mathbb{K}}\}$. L'ensemble des valeurs propre est appelé spectre de u et noté $Sp(u)$

Définition 2. Un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ est un vecteur $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Définition 3. Le sous espace propre de u associé à la valeur propre λ est le sous espace $E_{\lambda}(u) = E_{\lambda} = \ker(u - \lambda Id)$. La dimension de ce sous espace propre est noté $m_g(\lambda)$ est appelé multiplicité géométrique de λ .

Proposition 4. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes deux à deux distinctes est libre.

Exemple 5. Le résultat est vrai même en dimension infinie, par exemple pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $f_a : x \mapsto e^{ax}$ est un vecteur propre de l'opérateur de dérivation dans $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$. Ainsi pour tous réels deux à deux distincts la famille $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$ est libre.

Corollaire 6. Un endomorphisme de d'un espace vectoriel de dimension n admet au plus n valeurs propres distinctes.

Définition 7. Le polynôme caractéristique de u est $\chi_u(X) = \det(XI_n - u)$. Il ne dépend pas de la base de E choisie.

Proposition 8. Soit F un sous espace de E stable par u . Alors le polynôme caractéristique $\chi_{u_F}(X)$ de l'endomorphisme induit divise $\chi_u(X)$.

Proposition 9. Les racines de $\chi_u(X)$ sont exactement les valeurs propres de u .

Définition 10. On appelle multiplicité algébrique d'une valeur propre λ , notée $m_a(\lambda)$ la multiplicité de la valeur propre dans $\chi_u(X)$.

Théorème 11. (Lemme des noyaux) Soit $(P_1, \dots, P_N)$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux, alors :

$$\ker(P_1 \dots P_N)(u) = \bigoplus_{k=1}^N \ker(P_k(u))$$

De plus les projecteurs de $\ker(P_1 \dots P_N)(u)$ sur l'un de ces sous espaces parallèlement aux autres sont des polynômes en u .

Théorème 12. (Cayley-Hamilton) Le polynôme caractéristique χ_u de u est annulateur de u .

1.2 Critères de diagonalisabilité

Définition 13. Un endomorphisme est dit diagonalisable lorsqu'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale, c'est-à-dire qu'il existe une base de vecteurs propres pour cette endomorphisme ou si E est somme directe des sous espaces propres. Une matrice est dit diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Exemple 14. Si un endomorphisme est diagonalisable et n'admet qu'une seule valeur propre, alors c'est un scalaire. En particulier un endomorphisme nilpotent et diagonalisable est nul.

Proposition 15. Un endomorphisme qui admet n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Corollaire 16. Si le polynôme caractéristique $\chi_u(X)$ est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.

Théorème 17. Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé à racine simple.

Exemple 18. Les projecteurs et symétries vectorielles sont diagonalisables car admettent des polynômes annulateurs scindés à racines simples, respectivement $X^2 - X$ et $X^2 - 1$.

Théorème 19. *Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal $\mu_u(X)$ est scindé à racine simple.*

Exemple 20. Un endomorphisme de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

Proposition 21. *Soit u un endomorphisme diagonalisable et F un sous espace stable par u alors u_F est diagonalisable.*

Théorème 22. *Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si $\chi_u(X)$ est scindé et la dimension de chaque sous espace propre $m_g(\lambda)$ est égale à la multiplicité $m_a(\lambda)$ de la valeur propre dans $\chi_u(X)$.*

Corollaire 23. *Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si la somme des dimension de ses sous espaces propres est égale à n .*

Définition 24. On dit que u est semi-simple lorsque tout sous espace stable par u admet un supplémentaire stable par u .

Théorème 25. *Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, u est semi-simple si et seulement il est diagonalisable.*

1.3 Co-diagonalisation

Définition 26. Une famille finie d'endomorphismes $(u_1, \dots, u_N)$ est co-diagonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice chacun des endomorphisme est diagonale.

Proposition 27. *Soit $u_1, \dots, u_N$ des endomorphismes diagonalisables, alors $(u_1, \dots, u_N)$ est co-diagonalisable si et seulement si les endomorphismes de la famille commutent deux à deux.*

Exemple 28. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables et $\Theta_{A,B} : M \mapsto AMB$, comme $G_A : M \mapsto AM$ et $D_B : M \mapsto MB$ commutent et sont diagonalisables, $\Theta_{A,B}$ est diagonalisable.

2 Cas particuliers

2.1 Décomposition de Dunford

Théorème 29. (Dunford) *Soit u un endomorphisme possédant un polynôme annulateur scindé. Alors il existe un unique couple d'endomorphisme (d, n) tels que $u = d + n$, n et d commutent, n est nilpotent, d est diagonalisable. De plus $d, n \in \mathbb{K}[u]$.*

Exemple 30. La décomposition de Dunford de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est $A = I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.2 Exponentielle d'endomorphismes

Définition 31. L'exponentielle de u est la somme de la série de terme général $\frac{u^k}{k!}$, on la note e^u ou $\exp(u)$. On définit de la même manière pour les matrices.

On considère $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans cette base.

Exemple 32. Observons que $\exp(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \text{diag}(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n))$.

Proposition 33. *Si A est diagonalisable alors $\exp(A)$ est diagonalisable et $Sp(\exp(A)) = \{\exp(\lambda), \lambda \in Sp(A)\}$.*

Lemme 34. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable alors il existe un polynôme P tel que $A = P(\exp(A))$.*

Remarque 35. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ce n'est plus vrai, par exemple avec $A = \text{diag}(0, 2i\pi)$ dont l'exponentielle est scalaire.

Proposition 36. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices diagonalisables admettant la même exponentielle, alors $A = B$.*

Proposition 37. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A = D + N$ sa décomposition de Dunford. Alors la décomposition de Dunford de $\exp(A)$ est donnée par $\exp(A) = \exp(D) + \exp(D)(\exp(N) - I_n)$

Proposition 38. Supposons que $\chi_A(X)$ soit scindé, alors A est diagonalisable si et seulement si $\exp(A)$ est diagonalisable.

2.3 Endomorphismes symétriques et Théorème spectral

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Théorème 39. Pour tout endomorphisme u il existe un unique endomorphisme u^* tel que $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$ pour tous $x, y \in E$.

Définition 40. On appelle cet endomorphisme u^* l'adjoint de u .

Définition 41. Un endomorphisme est dit symétrique ou auto-adjoint lorsque $u^* = u$, c'est-à-dire que : $\forall x, y \in E \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$. On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E .

Théorème 42. Un endomorphisme u est symétrique si et seulement sa matrice dans une base orthonormée est symétrique

Lemme 43. Les valeurs propres d'un endomorphisme symétrique réel sont toutes réelles.

Lemme 44. Si $n \geq 2$ et soient λ et μ des valeurs propres de $u \in \mathcal{S}(E)$, alors les espaces E_λ et E_μ sont orthogonaux.

Lemme 45. Pour $n \geq 2$, si λ est une valeur propre de $u \in \mathcal{S}(E)$ et $e_1 \in E_\lambda$ de norme 1, alors l'hyperplan $H = (\mathbb{R}e_1)^\perp$ est stable par u et la restriction de u à H est symétrique.

Théorème 46. (Spectral) Tout endomorphisme symétrique $u \in \mathcal{S}(E)$ se diagonalise dans une base orthonormée.

Références

- [RM16] Rached MNEIMNE ROGER MANSUY : Algèbre linéaire : réduction des endomorphismes : cours exercices corrigés : licence mathématiques, classes préparatoires scientifiques. Vuibert, 2016.
- [ROM17] Jean Etienne ROMBALDI : Mathématiques pour l'Agrégation : Algèbre géométrie. De Boeck Supérieur, 2017.

RAPPORT DU JURY :

Dans cette leçon, on attend des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité. On doit notamment savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est encore diagonalisable. Il ne faut pas oublier de parler du cas des endomorphismes symétriques, ni les familles commutantes d'endomorphismes diagonalisables. On peut étudier certaines propriétés topologiques en prenant le soin de donner des précisions sur le corps K et la topologie choisie pour $M_n(K)$. Les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux propriétés de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables dans les corps finis, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation. Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide.