

Leçon 151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

On considère $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, u un endomorphisme de E .

1 Stabilité d'un espace

1.1 Généralités

Définition 1. Un sous espace vectoriel $F \subset E$ est stable par u lorsque $u(F) \subset F$.

Exemple 2. Les sous espaces $\text{im}(u)$ et $\text{ker}(u)$ sont stables par u . Plus généralement pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, le noyau et l'image de $P(u)$ est stable par u .

Proposition 3. Soient $u, v \in \text{End}_{\mathbb{K}}(E)$, $F \subset E$ un sous espace stable par u et par v . Alors F est stable par $u + v$ et par $u \circ v$.

Remarque 4. On peut, par récurrence généraliser le résultat à une famille de n vecteurs avec F stable par chacun des éléments, ainsi F est stable par toute combinaison linéaire d'endomorphismes de cette famille et toute composition.

Proposition 5. Soit v un automorphisme de E et $F \subset E$ sous espace stable par u . Alors $v(F)$ est un sous espace stable par $v \circ u \circ v^{-1}$.

Remarque 6. L'intérêt des sous espaces stables est d'obtenir une description plus simple de u . Si l'on peut écrire E comme somme directe de F_i stables par u alors étudier u revient à l'étudier sur chacun des F_i .

Définition 7. Soit F un sev de E , la restriction de u à F est l'application $u|_F : F \rightarrow E$ telle que $u|_F(x) = u(x)$ pour tout $x \in F$.

Proposition 8. Soit F un sev de E , alors $\text{ker}(u|_F) = F \cap \text{ker}(u)$ et $\text{im}(u|_F) = u(F)$.

Corollaire 9. Soit $k \in \mathbb{N}$, on a $\dim(\text{ker}(u^{k+1})) = \dim(\text{ker}(u^k)) + \dim(\text{im}(u^k) \cap \text{ker}(u))$

Exemple 10. Remarquons que $\dim(\text{ker}(u^2)) = 2 \dim(\text{ker}(u))$ si et seulement si $\text{ker}(u) \subset \text{Im}(u)$.

1.2 Endomorphismes induits

Définition 11. Soit F un sous espace de E stable par u , l'endomorphisme induit par u sur F est le morphisme $u_F : F \rightarrow F$ défini par $u_F(x) = u(x)$ pour tout $x \in F$.

A présent on considère $F \subset E$ un sous espace stable par u .

Proposition 12. Le polynôme minimal de u_F divise le polynôme minimal de u .

Proposition 13. Si $E = F \oplus G$ avec F et G stables par u , alors le polynôme minimal de u est le ppcm des polynômes minimaux de u_F et u_G .

Exemple 14. Tous les sous espaces sont stables par une homothétie.

Exemple 15. Si p est un projecteur, alors un sous espace est stable par p si et seulement si il est somme directe d'un sous espace de $\text{Im}(p)$ et de $\text{ker}(p)$.

2 Application à la réduction

2.1 Lemme des noyaux et diagonalisabilité

Proposition 16. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $D = \text{pgcd}(P, Q)$ alors $\text{ker}(P(u)) \cap \text{ker}(Q(u)) = \text{ker}(D(u))$

Théorème 17. (Lemme des noyaux) Soit $(P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes 2 à 2 premiers entre eux.

Alors $\ker(P_1 \dots P_n)(u) = \bigoplus_{k=1}^n \ker(P_k(u))$.

De plus les projecteurs de $\ker(P_1 \dots P_n)(u)$ sur l'un de ces sous espaces parallèlement à la somme des autres sont des polynômes en u .

Définition 18. Soit λ une valeur propre de u , on appelle sous espace propre associé à λ l'espace $E_\lambda = \ker(u - \lambda Id)$.

Proposition 19. Les sous espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

Proposition 20. Un sous espace propre est stable et même tout sous espace d'un espace propre est stable.

Définition 21. La multiplicité algébrique d'une valeur propre λ est sa multiplicité en tant que racine de $\chi_u(X)$, notée $m_a(\lambda)$. Le sous espace caractéristique associé à λ est $F_\lambda = \ker(u - \lambda Id)^{m_\lambda}$.

Proposition 22. Soit λ une valeur propre de u , alors F_λ est stable par u .

Corollaire 23. Si $\chi_u(X)$ est scindé alors $E = \bigoplus_{i=1}^r F_{\lambda_i}$.

Théorème 24. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. u est diagonalisable,
2. $E = \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}$,
3. $\sum_{k=1}^p \dim(E_{\lambda_k}) = n$,
4. $\chi_u(X)$ est scindé de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et chaque λ_k est de multiplicité $m_a(\lambda_k) = \dim(E_{\lambda_k})$,
5. il existe un polynôme annulateur de u scindé à racine simples,
6. le polynôme minimal $\pi_u(X)$ est scindé à racine simple.

Théorème 25. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables, alors cette famille est codiagonalisable si et seulement si ils commutent 2 à 2.

2.2 Trigonalisabilité

Définition 26. On appelle drapeau de E une suite croissante de sous espaces vectoriels $\{0_E\} = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_r \subset E$. Il est dit complet lorsqu'il est formé de $n + 1$ sous espaces et que $\dim(E_i) = i$

Théorème 27. u est trigonalisable si et seulement si il existe un drapeau complet stable par u .

Exemple 28. Pour $E = \mathbb{R}_n[X]$, un drapeau complet est constitué des $E_i = \mathbb{R}_i[X]$. Ainsi un endomorphisme est trigonalisable si il diminue (au sens large) le degré du polynôme. Ainsi $P \mapsto P'$ et $P(X) \mapsto P(X + 1)$ sont trigonalisables.

Théorème 29. u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique $\chi_u(X)$ est scindé.

Corollaire 30. Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors tout endomorphisme est trigonalisable.

Corollaire 31. Si u est trigonalisable et F stable par u alors u_F est aussi trigonalisable.

Théorème 32. Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille d'endomorphisme trigonalisables qui commutent 2 à 2, alors la famille est co-trigonalisable.

2.3 Endomorphismes semi-simples

Définition 33. On dit que u est semi-simple lorsque tout sous espace stable par u admet un supplémentaire stable par u .

Théorème 34. Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, u est semi-simple si et seulement il est diagonalisable.

Théorème 35. Si u est semi-simple, alors son polynôme minimal est sans facteur carré dans sa décomposition en produit d'irréductibles.

Théorème 36. Si le polynôme minimal de u est sans facteur carré dans sa décomposition en facteurs irréductibles, alors u est semi-simple.

Lemme 37. Si u est semi-simple, alors pour tout sous espace F stable par u , alors u_F est semi-simple.

Théorème 38. (Dunford) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il existe un unique couple d'endomorphisme (d, v) avec d semi-simple, v nilpotent, d et v commutent et $u = d + v$.

Dev 1 : Lemme des noyaux 17

Dev 2 : Endo semi simples 34

Références

- [GOU21] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Algèbre et probabilités. Editions Ellipses, 2021.
- [RM22] Rached MNEIMNE ROGER MANSUY : Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes : Cours et exercices corrigés - Licence Prépas Capes Agrégation. De Boeck Supérieur, 2022.
- [ROM17] Jean Etienne ROMBALDI : Mathématiques pour l'Agrégation : Algèbre géométrie. De Boeck Supérieur, 2017.

RAPPORT DU JURY :

Dans cette leçon, il faut présenter des propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées sont les bienvenues, par exemple dans le cas d'une matrice diagonalisable ou dans le cas d'une matrice nilpotente d'indice maximum. L'étude des endomorphismes cycliques et des endomorphismes semi-simples trouvent tout à fait leur place dans cette leçon. Dans le cas des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on pourra, si on le souhaite, caractériser ces derniers par la fermeture de leur orbite. Il ne faut pas oublier d'examiner le cas des sous-espaces stables par des familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des propriétés des endomorphismes commutant entre eux. La réduction des endomorphismes normaux et l'exemple de résolutions d'équations matricielles peuvent être présentés en applications. La décomposition de Frobenius constitue également une application intéressante de cette leçon. Pour aller plus loin, on peut envisager de développer l'utilisation de sous-espaces stables en théorie des représentations.