

Leçon 150 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie, réduction d'endomorphismes. Applications

On considère $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, u un endomorphisme de E .

1 Polynômes d'endomorphismes

1.1 L'algèbre $\mathbb{K}[u]$

Définition 1. On note $u^0 = Id$ et on définit les puissances successives de u par la relation de récurrence $u^{k+1} = u^k \circ u$. Cela permet de définir, pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, l'endomorphisme $P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k$. Cette sous algèbre notée $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$ est commutative.

Théorème 2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Pour toute valeur propre λ de u , $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$. Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, on a alors $Sp(P(u)) = \{P(\lambda), \lambda \in Sp(u)\}$

Définition 3. On appelle idéal annulateur de u l'idéal $I_u = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ et polynôme minimal de u le générateur unitaire de cet idéal noté μ_u .

Définition 4. Le polynôme caractéristique $\chi_u \in \mathbb{K}[X]$ de u est défini par $\det(u - XId)$.

Exemple 5. Pour un projecteur $u = u \circ u$ est annulé par $X^2 - X$, si $u = 0$ son polynôme minimal est X , si $u = Id$ c'est $X - 1$ et dans les autres cas c'est $X^2 - X$.

Définition 6. Soit F un sous espace vectoriel de E . On dit que F est stable par u lorsque $u(F) \subseteq F$.

Lemme 7. Si F est un sous espace vectoriel de E stable par u , alors le polynôme minimal de la restriction de u à F divise celui de u .

Théorème 8. Pour tout polynôme annulateur $P \in I_u$, on a $Sp(u) \subset P^{-1}(\{0\})$ c'est-à-dire que les valeurs propres de u sont des racines et même $Sp(u) = \mu_u^{-1}(\{0\})$.

Théorème 9. L'espace vectoriel $\mathbb{K}[u]$ est de dimension égale au degré p_u de μ_u et une base est donnée par $(Id, u, u^2, \dots, u^{p_u-1})$.

Théorème 10. On a les équivalences :
 $\mathbb{K}[u]$ est un corps $\iff \mathbb{K}[u]$ est intègre $\iff \mu_u$ est irréductible.

1.2 Le théorème de Cayley-Hamilton

Définition 11. Pour tout vecteur non nul $x \in E$ on pose $I_{u,x} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0\}$. C'est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par $\mu_{u,x}$ de degré $p_{u,x}$. On pose aussi $E_{u,x} = Vect(\{u^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\})$.

Lemme 12. $E_{u,x}$ est un sous espace vectoriel de dimension $p_{u,x}$ de E stable par u . Le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de la restriction de u à $E_{u,x}$ sont égaux.

Théorème 13. (Cayley-Hamilton) Le polynôme caractéristique χ_u de u est annulateur de u .

Corollaire 14. Le polynôme minimal μ_u divise le polynôme caractéristique χ_u donc $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\mu_u) \leq n$

Lemme 15. Soit $p \geq 2$ un entier, $P_1, \dots, P_p \in \mathbb{K}[X]$ non nuls et $Q_1, \dots, Q_p \in \mathbb{K}[X]$ tels que $Q_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n P_j$ pour $k \in \{1, \dots, p\}$. Si les P_k

sont 2 à 2 premiers entre eux alors les Q_k sont globalement premiers entre eux et pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$ les polynômes P_k et Q_k sont premiers entre eux.

Théorème 16. (Lemme des noyaux) Soient $(P_j)_{1 \leq j \leq p}$ une famille de polynômes 2 à 2 premiers entre eux dans $\mathbb{K}[X]$ et $P = \prod_{k=1}^p P_k$. On a alors $\ker(P(u)) = \bigoplus_{k=1}^p \ker(P_k(u))$ et les projecteurs $\pi_k : \ker(P(u)) \rightarrow \ker(P_k(u))$ sont des éléments de $\mathbb{K}[u]$ pour $k \in \{1, \dots, p\}$.

2 Réduction d'endomorphismes

2.1 Trigonalisation

Définition 17. Un endomorphisme u est trigonalisable lorsqu'elle il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire.

Théorème 18. L'endomorphisme u est trigonalisable sur $\mathbb{K}$, si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 19. Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors tout endomorphisme u est trigonalisable.

Corollaire 20. Si un endomorphisme u (resp matrice A) est trigonalisable, la trace de u (resp de A) est la somme de ses valeurs propres et le déterminant de u (resp de A) est le produit de ses valeurs propres.

Exemple 21. Dans $\mathbb{R}$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cos(\theta) & -2 \cos(\theta) \\ 0 & 2 \cos(\theta) & -2 \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

n'est pas trigonalisable

2.2 Diagonalisation

Définition 22. Un endomorphisme u est diagonalisable lorsqu'elle il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

Proposition 23. Si u possède n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$, alors u est diagonalisable.

Théorème 24. (CNS de diagonalisabilité) Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L'endomorphisme u est diagonalisable,
2. $E = \bigoplus_{k=1}^p \ker(u - \lambda_k Id)$,
3. $\sum_{k=1}^p \dim(\ker(u - \lambda_k Id)) = n$,
4. Le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$ de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ dans $\mathbb{K}$, étant de multiplicité $\alpha_k = \dim(\ker(u - \lambda_k Id))$,
5. Il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples,
6. Le polynôme minimal μ_u de u est scindé à racines simples.

Exemple 25. Un projecteur est diagonalisable car annulé par $X^2 - X = X(X - 1)$.

Définition 26. Une famille $(u_i)_{i \in I}$ est simultanément diagonalisable lorsqu'il existe une base dans laquelle tous les endomorphismes u_i sont diagonalisable.

Théorème 27. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphisme diagonalisable. Cette famille est simultanément diagonalisable si et seulement si ils commutent 2 à 2, c'est-à-dire que pour tout $(i, j) \in I^2$ on ait $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$.

2.3 Décomposition de Dunford

Notation 28. On suppose que le polynôme minimal de u est scindé $\mu_u = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\beta_k}$ où les λ_k sont les valeurs propres distinctes de u et

$\beta_k \in \mathbb{N}^*$, le polynôme caractéristique s'écrit alors $\chi_u = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ avec $1 \leq \beta_k \leq \alpha_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$.

Définition 29. Avec ces notations on appelle sous espace caractéristique de u les sous espaces vectoriels $\ker(u - \lambda_k Id)^{\alpha_k}$ avec $k \in \{1, \dots, r\}$.

Théorème 30. Soit $P(X) = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_k}$ un polynôme annulateur de u avec $m_k \geq \beta_k$, on pose $N_k := \ker(u - \lambda_k)^{m_k}$. On a alors :

- $E = \bigoplus_{k=1}^p N_k$;
- $N_k = \ker(u - \lambda_k Id)^{\beta_k}$ où β_k est la multiplicité comme racine de μ_u ;
- N_k est stable par u et λ_k est la seule valeur propre de la restriction de u à N_k ;
- $\dim(N_k) = \alpha_k$ où α_k est la multiplicité comme racine de χ_u ;
- La restriction de $u - \lambda_k Id$ à N_k est nilpotente d'indice β_k .

Théorème 31. (Dunford) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec χ_u scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que d soit diagonalisable, n soit nilpotent, d et n commutent et $u = d + n$. De plus d et n sont des polynômes en u .

Définition 32. La série entière $\sum \frac{z^k}{k!}$ ayant un rayon de convergence infini, la série $\sum \frac{1}{k!} u^k$ est convergente pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$. Sa somme est appelée exponentielle de u et notée $\exp(u) = e^u$.

Théorème 33. Si $u = d + n$ est la décomposition de Dunford de u , alors celle de e^u est donnée par $e^u = e^d + e^d(e^n - Id)$ avec e^d diagonalisable et $e^d(e^n - Id)$ nilpotente.

Corollaire 34. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors u est diagonalisable si et seulement si e^u est diagonalisable

3 Applications

Proposition 35. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable (resp trigonalisable), on note P la matrice de passage telle que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale (resp $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire) alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $A^k = PD^kP^{-1}$ (resp $A^k = PT^kP^{-1}$). De même on a le résultat $\exp(A) = P \exp(D) P^{-1}$.

Remarque 36. L'intérêt ici est que la puissance/exponentielle d'une matrice diagonale est la matrice diagonale avec les coefficients élevés à la puissance/exponentielle. Les calculs sont donc beaucoup plus simples.

Exemple 37.

Définition 38. On dit qu'un endomorphisme u est semi-simple si tout sous espace vectoriel F de E stable par u admet un supplémentaire dans E stable par u .

Théorème 39. Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos alors u est semi-simple si et seulement si il est diagonalisable.

Théorème 40. Un polynôme u est semi-simple si et seulement si son polynôme minimal est sans facteurs carré dans sa décomposition en facteurs irréductibles. C'est-à-dire $\mu_u = \prod_{k=1}^p P_k$ où les P_k sont des polynômes irréductibles 2 à 2 distincts.

Lemme 41. Si u est semi simple, alors pour tout sous espace $F \subset E$ stable par u alors $u|_F$ est semi-simple.

Théorème 42. (Dunford 2) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que d est semi-simple, n est nilpotent, d et n commutent et $u = d + n$.

Dev 1 : Lemme des noyaux 16
Dev 2 : DUNFORD 31 34
Dev 3 : Endo semi simples 39

Références

- [GOU21] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Algèbre et probabilités. Editions Ellipses, 2021.
- [RM16] Rached MNEIMNE ROGER MANSUY : Algèbre linéaire : réduction des endomorphismes : cours exercices corrigés : licence mathématiques, classes préparatoires scientifiques. Vuibert, 2016.
- [ROM17] Jean Etienne ROMBALDI : Mathématiques pour l'Agrégation : Algèbre géométrie. De Boeck Supérieur, 2017.

RAPPORT DU JURY :

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à

l'algèbre $K[u]$, en particulier en connaître la dimension, et aux liens entre réduction de l'endomorphisme u et structure de l'algèbre $K[u]$. Il est ensuite possible de s'intéresser aux propriétés globales de cette algèbre (inversibles, condition nécessaire et suffisante assurant que ce soit un corps...). De même il est important de mettre en évidence les liens entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques. Le lemme des noyaux, les polynômes caractéristiques et minimaux doivent figurer dans la leçon. Il faut bien préciser que, dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître des conséquences théoriques et pratiques. On attend que la candidate ou le candidat soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). L'aspect applications est trop souvent négligé. Il est par exemple possible d'envisager des applications au calcul de A^k à l'aide d'un polynôme annulateur, aux calculs d'exponentielles de matrices ou de mener l'analyse spectrale de matrices stochastiques. Pour aller plus loin, la candidate ou le candidat pourra étudier des équations matricielles et de calcul fonctionnel, avec par exemple l'étude de l'extraction de racines ou du logarithme.