

Leçon 149 : Déterminant. Exemples et applications.

On considère $\mathbb{K}$ un corps commutatif avec $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ et E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

1 Construction du déterminant

1.1 Formes multilinéaires

Définition 1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ on dit que $f : E^p \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme p-linéaire si pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ et tout $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p) \in E^{p-1}$ l'application $x \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_p)$ est $\mathbb{K}$ linéaire. On note $\mathcal{L}_p(E)$ l'ensemble des formes p-linéaire sur E .

Définition 2. Soit $f \in \mathcal{L}_p(E)$, on dit que f est alternée lorsque $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ dès que deux vecteurs parmi les x_i sont égaux. On dit que f est antisymétrique si pour tout i, j on a $f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$.

Théorème 3. f est antisymétrique si et seulement si pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_p$ on a $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)f(x_1, \dots, x_p)$.

Proposition 4. Soit $f \in \mathcal{L}_p(E)$ alternée et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille liée alors $f(x_1, \dots, x_p) = 0$.

Théorème 5. L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 1.

1.2 Déterminant d'une famille de vecteur

Définition 6. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Le déterminant de $\mathcal{B}$ noté $\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme n-linéaire alternée telle que $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$

Proposition 7. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E et $x_1, \dots, x_n \in E$ avec $x_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n})$ alors $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \dots x_{n,\sigma(n)}$.

Proposition 8. (Changement de base) Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de E , alors $\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$. En particulier $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.

1.3 Déterminant de matrices et d'endomorphismes

Définition 9. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E . Le déterminant de f noté $\det(f)$ est le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ et ne dépend pas de la base choisie.

Définition 10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on note $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes. On a $\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n)$ dans $\mathcal{B}$ une base quelconque de E .

Remarque 11. Si A est la matrice de f dans une base quelconque alors $\det(A) = \det(f)$.

Proposition 12. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ on a :

1. $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$,
2. $\det(\text{Id}_E) = 1$,
3. $f \in GL(E) \iff \det(f) \neq 0$ et on a alors $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.
4. $\det({}^t A) = \det(A)$

Ces résultats sont vrais dans le cas matriciel.

2 Calcul pratique

2.1 Techniques de calcul

Définition 13. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour tout (i, j) on appelle mineur de $a_{i,j}$ le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice obtenue en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne de la matrice A . On appelle cofacteur de $a_{i,j}$ le scalaire $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$.

Proposition 14. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a alors $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$ en fixant j et $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$ en fixant i .

Exemple 15. Si A est triangulaire alors $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$.

Définition 16. La matrice $(A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ des cofacteurs est appelée comatrice de A notée $\tilde{A}$.

Proposition 17. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $A^t \tilde{A} = {}^t \tilde{A} A = \det(A) I_n$.

Proposition 18. (Pivot de Gauss) Le déterminant est inchangé si l'on ajoute à une de ses colonnes (lignes) une combinaison linéaire des autres. Ainsi on peut transformer toute matrice en une matrice triangulaire et calculer facilement le déterminant.

2.2 Déterminants classiques

Exemple 19. (Vandermonde) Pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ on a

$$V(a_1, \dots, a_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

En particulier la matrice est inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

Applications 20. (Interpolation de Lagrange) Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Pour tout $\beta_0, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(\alpha_i) = \beta_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$.

Exemple 21. (Déterminant Circulant) Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $P = \alpha_n X^{n-1} + \dots + \alpha_2 X + \alpha_1$ on a alors

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega^i)$$

3 Applications

3.1 Algèbre linéaire

Définition 22. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit λ est valeur propre lorsque $\ker(\lambda Id - f) \neq \{0\}$ et on note $Sp(f)$ l'ensemble des valeurs propres. On note $E_\lambda = \ker(\lambda Id - f)$ le sous espace caractéristique de f associé à λ , ses éléments non nuls sont appelés vecteurs propres.

Définition 23. On appelle polynôme caractéristique de f le polynôme $\chi_f(X) = \det(X Id - f)$.

Proposition 24. On a l'équivalence $\lambda \in Sp(f) \iff \chi_f(\lambda) = 0$.

Proposition 25. On a l'égalité $\chi_f(0) = (-1)^n \det(f)$.

Définition 26. On dit que f est diagonalisable lorsqu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f . Dans cette base la matrice de f est alors diagonale.

Théorème 27. Il y a équivalence entre : f est diagonalisable $\iff \chi_f$ est scindé et pour tout λ racine de χ_f de multiplicité α_λ on a $\dim(E_\lambda) = \alpha_\lambda \iff$ il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in Sp(f)$ tels que $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$.

Théorème 28. (Cayley Hamilton) Le polynôme caractéristique de f est annulateur de f .

Théorème 29. (Système de Cramer) Soient $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$, on note $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{K}^n$ les colonnes de A . La solution du système $AX = B$ est donnée par $X = (x_1, \dots, x_n)$ où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a $x_i = \frac{\det(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)}{\det(A)}$.

3.2 En analyse

Proposition 30. L'application $\det : GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*$ est un morphisme de groupe surjectif.

Proposition 31. Le déterminant est une application polynomiale en les coordonnées de la matrice. Par conséquent $\det$ est continue.

Théorème 32. L'ensemble $GL_n(\mathbb{C})$ est dense ouvert et connexe par arc dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Théorème 33. L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est dense ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Applications 34. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

3.3 Géométrie

Applications 35. Soient $\mathcal{P} = (z_1, \dots, z_n)$ un polynôme à n sommets et $a, b \in]0, 1[$ tels que $a + b = 1$. La suite vectorielle définie par $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_{k+1} = (ap_{k,1} + bp_{k,2}, \dots, ap_{k,n} + bp_{k,1})$ où $\mathcal{P}_k = (p_{k,1}, \dots, p_{k,n})$ converge vers l'isobarycentre de $\mathcal{P}$.

Définition 36. (Déterminant de Gram) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace pré-hilbertien et $(x_1, \dots, x_n) \in E$ on pose :

$$G(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \dots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{pmatrix} \text{ et on note } g(x_1, \dots, x_n)$$

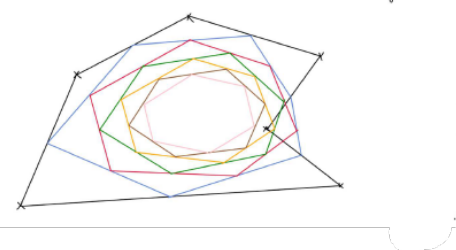
son déterminant.

Théorème 37. Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors pour toute famille $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ on a $\text{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n)$.

Corollaire 38. Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors pour toute famille $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on a $g(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ et ce système est libre si et seulement si $g(x_1, \dots, x_n) > 0$.

4 Annexe

FIGURE 2: Suite de polygones



Suite de polygones

Dev 1 : GLn dense ouvert connexe 32

Dev 2 : Suites de polygones 21 et 35

Références

- [CAL22] Philippe CALDERO : Carnet de voyage en algèbre. Calvage et Mounet, 2022.
- [GOU21] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Algèbre et probabilités. Ellipses, 2021.
- [ROM17] JeanÉtienne ROMBALDI : Mathématiques pour l'Agrégation : Algèbre géométrie. De Boeck Supérieur, 2017.

RAPPORT DU JURY :

Dans cette leçon, il faut commencer par définir correctement le déterminant. et savoir démontrer ses propriétés fondamentales (en particulier le fait que l'espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1). La distinction entre le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée et le déterminant d'un endomorphisme doit être comprise. L'interprétation en termes de volume est essentielle. Le calcul explicite est important, mais le jury ne peut se contenter d'un déterminant de Vandermonde ou d'un déterminant circulant. Les opérations élémentaires permettant de calculer des déterminants doivent être présentées et illustrées. Parmi les applications possibles, on peut citer le polynôme caractéristique, les déterminants de Gram (permettant des calculs de distances), le déterminant jacobien (utile en calcul intégral et en probabilités), donner des exemples d'utilisation du déterminant en géométrie (coordonnées barycentriques, colinéarité, etc.) ou son rôle dans l'étude des formes quadratiques. Il est bienvenu d'illustrer la continuité du déterminant par une application. On pourra aussi s'intéresser à sa différentielle.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux calculs de déterminants sur $\mathbb{Z}$. Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent aussi trouver leur place dans cette leçon pour des candidates et candidats ayant une pratique de ces notions.