

Leçon 148 : Dimension d'un espace vectoriel (cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications

On considère $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

1 Espaces vectoriels et dimension

1.1 Famille de vecteurs et dimension

Définition 1. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de E , on dit que $(a_i)_{i \in I}$ est génératrice lorsque $\text{Vect}((a_i)_{i \in I}) = E$.

On dit que $(a_i)_{i \in I}$ est libre lorsqu'aucun vecteur n'est combinaison linéaire des autres (équivalent à $\sum_{i \in I} \lambda_i a_i = 0 \implies \forall i \in I, \lambda_i = 0$).

Dans le cas contraire la famille est dite liée.

Exemple 2. Dans $\mathbb{R}^2$ la famille $((1, 0), (0, 1))$ est libre et génératrice, la famille $((2, 1), (1, 0), (0, 1))$ est génératrice et liée.

Théorème 3. Si E est engendré par un nombre fini $n \in \mathbb{N}$ de vecteurs, alors toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.

Applications 4. Si A est une $\mathbb{K}$ algèbre engendrée par n vecteurs, alors $\forall a \in A, \exists P \in \mathbb{K}[X], P(a) = 0$.

1.2 Bases

Définition 5. Une famille libre et génératrice de E est appelée base.

Exemple 6. $((1, 0), (0, 1))$ base de $\mathbb{R}^2$ et $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ base de $\mathbb{K}[X]$.

Définition 7. On dit que E est de dimension finie si il existe une famille génératrice finie de E . Dans le cas contraire E est dit de dimension infinie. Par convention $\dim(0) = 0$.

Proposition 8. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E , alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des e_i , $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Les $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ sont les coordonnées de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Désormais E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 9. De toute partie génératrice de E on peut extraire une partie génératrice finie.

Théorème 10. Soit $L \subset E$ libre et $T \subset E$ génératrice alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{B}$ est finie, $L \subset \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \subset T$.

Théorème 11. Toutes les bases de E possèdent n éléments.

Théorème 12. Soit $\mathcal{G} \subset E$ génératrice et $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ libre. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

Remarque 13. Le résultat est aussi vrai en dimension infinie avec l'axiome du choix.

Théorème 14. Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E .

Théorème 15. De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E .

Corollaire 16. Toute famille libre et toute famille génératrice de n vecteur forme une base de E .

Proposition 17. Soient $E_1, \dots, E_k$ des sous espaces vectoriels de E alors : $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_k \iff (E = E_1 + \dots + E_k \text{ et } \sum_{i=1}^k \dim(E_i) = n)$

Proposition 18. Soient E_1 et E_2 des sous espaces vectoriels de E , alors $E_1 + E_2$ est un sous espace vectoriel de E et $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$.

Applications 19. Soient F et G des sous espaces vectoriels de E avec $\dim(F) = \dim(G)$, alors ils admettent un supplémentaire commun H c'est-à-dire $E = F \oplus H = G \oplus H$

2 Notion de rang

2.1 Rang d'une application linéaire

Définition 20. Soit E et F des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est linéaire lorsque : $\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.
On pose $\mathcal{L}(E, F) = \{f : E \rightarrow F \mid f \text{ linéaire}\}$.

Exemple 21. Les applications $\varphi : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R} ; f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$ et $\psi : E \rightarrow E ; x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ sont linéaires.

Définition 22. — L'image de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est le sous espace vectoriel $Im(f) = f(E) \subset F$.

- Le noyau de f est le sous espace vectoriel $\ker(f) = f^{-1}(\{0\})$.
- f est dit de rang fini lorsque $Im(f)$ est de dimension finie. On note alors $rg(f) = \dim(Im(f))$ le rang de f .

Proposition 23. Une application $f : E \rightarrow F$ est entièrement définie par l'image de n'importe quelle base de E .

Définition 24. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ on dit alors que f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$, que f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$ et que f est un isomorphisme lorsque f est bijective.

Proposition 25. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$:

1. Si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre et f injective alors $(f(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est libre.
2. Si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice de E et f surjective alors $(f(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice de F .
3. Si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E et f bijective alors $(f(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est une base de F .

Théorème 26. (Isomorphisme) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, il existe un isomorphisme entre $Im(f)$ et $E/\ker(f)$.

Théorème 27. (Du rang) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a alors $\dim(E) = rg(f) + \dim(\ker(f))$.

Corollaire 28. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim(E) = \dim(F) = n \in \mathbb{N}$ on a alors : f injective $\iff f$ bijective $\iff f$ surjective

Remarque 29. Ce résultat est faux en dimension infinie, par exemple $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] ; P \mapsto P'$ est surjective mais pas bijective.

2.2 Rang de matrices

Définition 30. Notons $\dim(E) = q$ et $\dim(F) = p$, soient $\mathcal{B}$ base de E , $\mathcal{B}'$ base de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour $1 \leq j \leq q$ on écrit $f(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij}e_i$. On pose alors $Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et on définit un isomorphisme $\Phi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) ; f \mapsto Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$.

Proposition 31. On a alors $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})) = pq = \dim(F) \dim(E)$.

Définition 32. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, le rang de A est le rang de ses vecteurs colonnes dans $\mathbb{K}^p$. Si A est la matrice d'une application linéaire f alors on a $rg(A) = rg(f)$.

Proposition 33. On a l'équivalence suivante : $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff rg(A) = n$.

Théorème 34. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, si $rg(A) = r \geq 1$ alors A est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Corollaire 35. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors A et B sont équivalentes si et seulement si $rg(A) = rg(B)$.

Proposition 36. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ alors $rg(A) = rg({}^t A)$.

Remarque 37. Grâce à cette proposition le rang d'une matrice est donc le rang de ses lignes dans $\mathbb{K}^p$

Théorème 38. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ alors le rang de A est le plus grand des ordres des matrices inversibles extraites de A .

Proposition 39. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ alors le rang de A est stable pour les opérations suivantes :

1. Échanger deux lignes ou deux colonnes,
2. Multiplier une ligne/colonne par un scalaire non nul,
3. Ajouter à une ligne (resp colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp colonnes).

Remarque 40. En particulier le rang est stable lors d'un pivot de Gauss.

Exemple 41. $rg \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$
 $rg \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

3 Applications

3.1 Formes quadratiques

On se place dans le cas réel et E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$

Définition 42. Une forme bilinéaire sur E est une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in E$ les applications $[y \mapsto \varphi(x, y)]$ et $[y \mapsto \varphi(y, x)]$ sont linéaires. Elle est dite symétrique lorsque pour tout $(x, y) \in E^2$ on a $\varphi(y, x) = \varphi(x, y)$.

Définition 43. Une forme quadratique sur E est une application $q : E \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \varphi(x, x)$ où φ est une forme bilinéaire symétrique, appelée forme polaire de q .

Définition 44. Le rang d'une forme quadratique q est le rang de sa forme polaire, c'est donc le rang de la matrice de φ dans une base de E .

Définition 45. Une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est dite q -orthogonale lorsque pour tout $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ on a $\varphi(e_i, e_j) = 0$.

Théorème 46. Si E est de dimension finie alors il existe une base q -orthogonale de E .

Théorème 47. (Sylvester) Soit ϕ une forme quadratique, il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $f_1, \dots, f_{p+q} \in E^*$ linéairement indépendantes avec $p + q \leq n$ tels que : $\phi = \sum_{i=1}^p |f_i|^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} |f_i|^2$. Le couple (p, q) est appelé signature de ϕ et ne dépend pas du choix des f_i , de plus $\text{rg}(\phi) = p + q$.

Exemple 48. $\phi(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx = (x + z)(y + t) = \frac{1}{4}[(x + y + z + t)^2 - (x + z - y - t)^2]$
La signature est $(1, 1)$ et donc le rang de ϕ est 2.

3.2 Dans un espace vectoriel normé

Théorème 49. Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire 50. Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Théorème 51. Si E est de dimension finie, les parties compactes de E sont exactement ses parties fermées bornées.

Théorème 52. (Riesz) On a l'équivalence suivante, E est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée est compacte.

Dev 1 : Sylvester 46 et 47

Dev 2 : Équivalence des normes et Riesz 49, 51 et 52.

Références

- [GOU20] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Analyse - 3e édition. Ellipses, 2020.
- [GOU21] Xavier GOURDON : Les maths en tête. Algèbre et probabilités. Ellipses, 2021.
- [GRI19] Joseph GRIFONE : Algèbre linéaire. Cepadues, 2019.
- [ROM17] Jean-Étienne ROMBALDI : Mathématiques pour l'Agrégation : Algèbre géométrie. De Boeck Supérieur, 2017.

RAPPORT DU JURY :

Dans cette leçon, il est indispensable de présenter les résultats fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Il est en particulier important de savoir justifier pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est aussi de dimension finie. On peut montrer, sur des exemples, comment la dimension finie intervient dans la démonstration de certains résultats (récurrence sur la dimension, égalité de sous-espaces par inclusion et égalité des dimensions, isomorphisme par injectivité et dimension, etc.). À cette occasion, on pourra signaler des résultats qui ne subsistent pas en dimension infinie. Le pivot de Gauss ainsi que les diverses notions et caractérisations du rang trouvent leur place dans cette leçon. Les applications sont nombreuses : existence de polynômes annulateurs, dimension de l'espace des formes n -linéaires alternées en dimension

n, isomorphisme avec le dual dans le cadre euclidien et théorème de Riesz, espaces de solutions d'équations différentielles ordinaires, caractérisation des endomorphismes diagonalisables, décomposition d'isométries en produits de réflexions, dimensions des représentations irréductibles d'un groupe fini, théorie des corps finis, etc. Les caractérisations du rang peuvent aussi être utilisées pour démontrer l'invariance du rang par extension de corps, ou pour établir des propriétés topologiques (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent déterminer des degrés d'extensions dans la théorie des corps ou s'intéresser aux nombres algébriques. Il est également possible d'explorer des applications en analyse comme les extrémums liés. Dans un autre registre, il est pertinent d'évoquer la méthode des moindres carrés dans cette leçon, par exemple en faisant ressortir la condition de rang maximal pour garantir l'unicité de la solution et s'orienter vers les techniques de décomposition en valeurs singulières pour le cas général. On peut alors naturellement analyser l'approximation d'une matrice par une suite de matrices de faible rang.