

Leçon 127 : Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.

1 Nombres remarquables

1.1 Rationnels et irrationnels

Définition 1. L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est le corps des fractions de l'anneau $\mathbb{Z}$. Les rationnels s'écrivent donc $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. Un nombre est irrationnel lorsqu'il est réel mais pas rationnel $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exemple 2. $\frac{1}{4} = 0,25$ et $\frac{1}{3}$ sont des rationnels.

Proposition 3. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$

Proposition 4. La somme d'un irrationnel et d'un rationnel est un irrationnel.

Le produit d'un irrationnel et d'un rationnel non nul est irrationnel. On ne peut rien dire sur la somme et produit d'irrationnels.

Théorème 5. Si $d \in \mathbb{N}$ n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{d}$ est irrationnel.

Définition 6. On définit le nombre e comme la somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!}$.

Théorème 7. e est irrationnel.

Définition 8. Le périmètre du cercle unité est π .

Théorème 9. π est irrationnel.

1.2 Algébriques et transcendants

Définition 10. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on dit que α est algébrique sur $\mathbb{K}$ lorsqu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(\alpha) = 0$. Dans le cas contraire il est dit transcendant.

Exemple 11. $\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \sqrt[3]{5}$ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$.

Définition 12. Soit $\mathbb{K}$ un corps, $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{L}$. On note $\mathbb{K}[\alpha]$ le sous-anneau de $\mathbb{L}$ engendré par $\mathbb{K}$ et α . On note $\mathbb{K}(\alpha)$ le plus petit sous corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et α .

Théorème 13. Soit $\mathbb{K}$ un corps, $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{L}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. α est algébrique sur $\mathbb{K}$;
2. $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha)$;
3. La dimension du $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{K}[\alpha]$ est finie. (C'est le degré de l'extension $\mathbb{K}[\alpha]$).

Proposition 14. La somme et le produit de deux entiers algébriques est encore algébrique.

Théorème 15. L'ensemble $M = \{x \in \mathbb{L} | x \text{ est algébrique sur } \mathbb{K}\}$ est un sous corps de $\mathbb{L}$.

Exemple 16. L'ensemble $A = \{x \in \mathbb{C} | x \text{ algébrique sur } \mathbb{Q}\}$ est un corps, extension algébrique sur $\mathbb{Q}$ mais non finie.

Théorème 17. (Admis) Les nombres e et π sont transcendants sur $\mathbb{Q}$.

Si place nombre de Liouville

1.3 Racines de l'unité

Définition 18. Une racine n -ième primitive de l'unité de $\mathbb{K}$ est un élément $\zeta \in \mathbb{K}$ tel que $\zeta^n = 1$ et $\zeta^d \neq 1$ pour tout $d < n$. C'est un générateur de $\mu_n(\mathbb{K})$ de sorte qu'il y ait $\varphi(n)$ racines primitives de l'unité, leur ensemble est noté $\mu_n^*(\mathbb{K})$.

Définition 19. Le n -ième polynôme cyclotomique de $\mathbb{K}$ est $\Phi_n(X) = \prod_{\zeta \in \mu_n^*(\mathbb{K})} (X - \zeta)$.

Exemple 20. Sur $\mathbb{Q}$ on a $\Phi_1(X) = X - 1$, $\Phi_2(X) = X + 1$, $\Phi_3(X) = X^2 + X + 1$ et $\Phi_4(X) = X^2 + 1$.

Remarque 21. Si $\zeta \in \mu_n^*(\mathbb{K})$ alors les ζ^d avec $\text{pgcd}(d, n) = 1$. Le polynôme $\Phi_n(X)$ est unitaire de degré $\varphi(n)$.

Proposition 22. On a $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$.

Proposition 23. Dans $\mathbb{Q}$ on a $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

Théorème 24. Le polynôme cyclotomique $\Phi_n(X)$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$ donc sur $\mathbb{Q}$.

Théorème 25. Soit $\zeta \in \mu_n^*(\mathbb{K})$, alors Φ_n est le polynôme minimal de ζ sur $\mathbb{Q}$.

Corollaire 26. Soit $\zeta \in \mu_n^*(\mathbb{K})$, alors $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$.

2 Anneaux de la forme $\mathbb{Z}[\omega]$

2.1 Anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$

Définition 27. On appelle anneau des entiers de Gauss l'anneau $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib | a, b \in \mathbb{Z}\}$ muni de l'addition et multiplication usuelle.

Proposition 28. L'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est intègre et ses inversibles sont $\mathbb{Z}[i]^* = \{-1, 1, -i, i\}$.

Proposition 29. On pose $\Sigma = \{n \in \mathbb{N} | n = a^2 + b^2, a, b \in \mathbb{N}\}$. Cet ensemble est stable par multiplication

Proposition 30. L'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien donc principal, pour le stathme $N : a + ib \mapsto a^2 + b^2$.

Proposition 31. On a $p \in \Sigma \iff p$ réductible dans $\mathbb{Z}[i] \iff p = 2$ ou $p \equiv 1[4]$.

Applications 32. Il existe une infinité de nombre premier de la forme $4m + 1$.

Théorème 33. Les irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont, à inversible près :

1. Les entiers premiers $p \in \mathbb{N}$ avec $p \equiv 3[4]$,
2. Les entiers de Gauss $a + ib$ tels que $a^2 + b^2 \in \mathcal{P}$.

2.2 Anneaux $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ [ROM17]

Dans cette sous partie pour $n \in \mathbb{N}^*$ on étudie l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}] = \{a + ib\sqrt{n} | (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Proposition 34. (Euclide) Dans un anneau factoriel, un élément est irréductible si et seulement si il est premier.

Proposition 35. $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ est un sous anneau de $\mathbb{C}$ stable par conjugaison.

Proposition 36. Pour $n \geq 2$ les inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ sont $\{-1, 1\}$.

Proposition 37. Pour $n \geq 3$, 2 est irréductible non premier dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$, ainsi $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ est intègre mais pas factoriel.

Théorème 38. $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ est euclidien si et seulement si $n = 1$ ou $n = 2$.

2.3 Anneau $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right]$ principal non euclidien

Dans cette sous partie on note $\omega = \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$.

Théorème 39. L'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}[\omega]$ est $\{-1, 1\}$.

Théorème 40. L'anneau $\mathbb{Z}[\omega]$ n'est pas euclidien car ne possède pas de stathme.

Lemme 41. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $u \in \mathbb{Z}[\omega]$ tel que $|z - u| < 1$ ou $|2z - v| < 1$.

Théorème 42. L'anneau $\mathbb{Z}[\omega]$ est principal.

(Au choix version Perrin ou Rombaldi)

Dev 1 : Polynômes cyclotomiques irréductibles 23 et 24
Dev 2 : Théorème des 2 carrés 31 et 33

Références

- [DUV07] Daniel DUVERNEY : Théorie des nombres : cours et exercices corrigés. Dunod, 2007.
- [PER96] Daniel PERRIN : Cours d'algèbre. Ellipses, 1996.
- [ROM17] JeanÉtienne ROMBALDI : Mathématiques pour l'Agrégation : Algèbre géométrie. De Boeck Supérieur, 2017.

RAPPORT DU JURY :

Le jury souhaite proposer une leçon qui offre une ouverture large autour du thème des nombres et des corps de nombres utilisés en algèbre ou en géométrie. L'objectif n'est pas d'en présenter le plus possible, mais plutôt d'en choisir certains, suffisamment variés, en expliquant la genèse et en soulignant leur intérêt par des applications pertinentes. Les nombres décimaux, dyadiques, etc. fournissent des ensembles de nombres dont l'étude, si elle est accompagnée d'applications pertinentes, a sa place dans cette leçon. Les questions d'approximation diophantienne et leur lien avec les fractions continues, sans toutefois être un attendu de la leçon, entrent dans la suite logique de ce type de considération. Le corps des nombres algébriques, ainsi que certains de ses sous-corps particuliers, comme celui formé par l'ensemble des nombres constructibles ou des sous-anneaux formés par certains ensembles d'entiers algébriques constituent des pistes d'étude. Les candidates et candidats qui maîtrisent ces notions pourront aussi s'aventurer du côté des nombres de Pisot. La transcendance de π et celle de e sont des résultats à connaître, et le candidat pourra en donner des applications s'il le désire, mais les démonstrations de ces résultats non triviaux ne sont pas exigibles. L'irrationalité de nombres remarquables ($\sqrt{2}$, nombre d'or, e , π) peut être abordée. Étudier les propriétés algébriques de certains ensembles de nombres (par exemple du type $\mathbb{Z}[\omega]$ où ω est un nombre algébrique) peut être une piste intéressante et mener à des applications en arithmétique. L'utilisation des nombres complexes ou, pour aller plus loin, des quaternions, en géométrie ou en arithmétique constitue aussi une piste exploitable pour cette leçon.