

Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie, sous groupes de $GL(E)$. Exemples et applications

Dans cette leçon on considère $\mathbb{K}$ un corps commutatif; et E désignera un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.

1 Généralités

1.1 Définitions et sous groupes

Définition 1. Le groupe linéaire de E noté $GL(E)$ est l'ensemble des inversibles de l'anneau $\mathcal{L}(E)$ des $\mathbb{K}$ -automorphismes de E .

Définition 2. On note $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de taille $n \times n$. En choisissant une base de E on crée un isomorphisme entre $GL(E)$ et $GL_n(\mathbb{K})$.

Théorème 3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ on a les équivalences suivantes :

1. $u \in GL(E)$
2. $\ker(u) = \{0\}$ (le morphisme est injectif)
3. $\text{Im}(u) = E$ (le morphisme est surjectif)
4. $\text{rg}(u) = n$
5. $\det(u) \neq 0$
6. u transforme toute base de E en une base de E
7. u admet un inverse à droite (ou à gauche)

Définition 4. Le groupe spécial linéaire $SL(E)$ est défini par $SL(E) = \{u \in GL(E), \det(u) = 1\}$ (respectivement grâce à l'isomorphisme $SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in GL_n(\mathbb{K}), \det(M) = 1\}$). C'est un sous groupe normal de $GL(E)$ (respectivement de $GL_n(\mathbb{K})$).

Proposition 5. Il y a un isomorphisme de groupe $\frac{GL(E)}{SL(E)} \cong \mathbb{K}^*$.

Théorème 6. Si $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ alors pour $m, n \geq 1$, les groupes $GL_n(\mathbb{K})$ et $GL_m(\mathbb{K})$ sont isomorphes si et seulement si $m = n$.

Théorème 7. Les centres des groupes linéaires et spécial linéaire sont : $Z(GL_n(\mathbb{K})) = \mathbb{K}^* I_n$ et $Z(SL_n(\mathbb{K})) = \mu_n(\mathbb{K}) I_n$, où l'ensemble $\mu_n(\mathbb{K})$ est défini par $\mu_n(\mathbb{K}) = \{x \in \mathbb{K}, x^n = 1\}$.

1.2 Générateurs

Définition 8. Soit φ une forme linéaire non nulle sur E . On appelle transvection d'hyperplan $\ker(\varphi)$ toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $\forall x \in E, u(x) = x + \varphi(x)a$, $a \in \ker(\varphi)$

On notera $\tau_{\varphi,a} = Id + \varphi \cdot a$.

Théorème 9. — $u \in \mathcal{L}(E)$ est une transvection si et seulement si il existe un hyperplan H tel que $u|_H = Id$ et $\text{Im}(u - Id) \subset H$.

- Pour tout $\tau_{\varphi,a}$ on a $\tau_{\varphi,a}^2 = \tau_{\varphi,2a}$.
- $\tau_{\varphi,a} \in GL(E)$ et son inverse est $\tau_{\varphi,-a}$. Si $\varphi \neq Id$ alors 1 est l'unique valeur propre d'espace propre $\ker(\varphi)$.
- Le conjugué dans $GL(E)$ d'une transvection est une transvection.

Théorème 10. Si $u \neq Id$ on a les équivalences suivantes :

1. u est une transvection,
2. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T_n = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$.

Définition 11. Soit φ une forme linéaire sur E , on appelle dilatation d'hyperplan $\ker(\varphi)$, toute application $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $\forall x \in E, u(x) = x + \varphi(x)a$, $a \in E \setminus \ker(\varphi)$.

On notera $\delta_{\varphi,a} = Id + \varphi \cdot a$

Théorème 12. Une dilatation $\delta_{\varphi,a}$ est inversible si et seulement si $1 + \varphi(a) := \lambda \neq 0$. On dira que la dilatation $\delta_{\varphi,a}$ est de rapport λ .

Proposition 13. L'inverse (lorsqu'elle existe) d'une dilatation de rapport λ est une dilatation de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

Théorème 14. Soit $u \in GL(E)$ on a l'équivalence suivante : u est une dilatation de rapport λ si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = D_n(\lambda) = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = I_n + (\lambda - 1)E_{n,n}$$

De plus $\lambda = \det(u)$

Théorème 15. Le groupe spécial linéaire $SL(E)$ est engendré par les transvections.

Corollaire 16. Le groupe linéaire $GL(E)$ est engendré par les transvections et les dilatations.

2 Étude selon le corps

2.1 Corps fini

Soit $\mathbb{K}$ le corps fini à q éléments avec $q = p^r$ et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 17. $\#(GL(E)) = \prod_{k=1}^n (q^n - q^{k-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^n (q^k - 1)$

$$\#(SL(E)) = q^{n-1} \prod_{k=1}^n (q^n - q^{k-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=2}^n (q^k - 1)$$

Proposition 18. $GL_2(\mathbb{F}_2) \cong SL_2(\mathbb{F}_2) \cong \mathfrak{S}_3$

2.2 Cas réel et complexe

Théorème 19. Le groupe linéaire $GL(E)$ est ouvert et dense dans $\mathcal{L}(E)$ et l'application $u \mapsto u^{-1}$ est continue sur $GL(E)$.

Théorème 20. Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{C})$ est dense, ouvert connexe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exemple 21. Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

3 Actions de groupe

3.1 Action par translation

Théorème 22. L'application $GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) ; (P, A) \mapsto PA$ définit une action par translation à gauche et deux matrices ont la même orbite si et seulement si elles ont le même noyau.

Théorème 23. — La multiplication à gauche d'une matrice par une matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ a pour effet de multiplier sa i -ième ligne par λ .

- La multiplication à gauche d'une matrice par une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer sa i -ième ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$.
- La multiplication à droite d'une matrice par une matrice de dilatation $D_j(\lambda)$ a pour effet de multiplier sa j -ième colonne par λ .
- La multiplication à gauche d'une matrice par une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer sa j -ième colonne C_j par $C_j + \lambda C_i$.

Théorème 24. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ produit de matrice de permutation et de transvection telle que PA soit échelonnée en ligne. Elle est dans l'orbite de A .

Remarque 25. Les opérations lors d'un Pivote de Gauss reviennent à multiplier A par une matrice de transvection ou de dilatation.

3.2 Action par conjugaison

Théorème 26. L'application $GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) ; (P, A) \mapsto PAP^{-1}$ définit une action par translation à gauche.

Définition 27. Deux matrices dans la même orbite pour cette action sont dites semblables.

Théorème 28. Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ les matrices $(A - \lambda I_n)^k$ et $(B - \lambda I_n)^k$ sont équivalentes.

Proposition 29. Une matrice est diagonalisable (resp trigonalisable) si et seulement si son orbite pour cette action contient une matrice diagonale (resp triangulaire supérieure).

Proposition 30. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ $\text{tr}(u^k) = 0$.

Lemme 31. Soient G un sous groupe de $GL(E)$, F le sous espace vectoriel engendré par G , $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p)$ une base de F extraite de G et $\varphi : G \rightarrow \mathbb{K}^p$; $u \mapsto (\text{tr}(u \circ u_1), \dots, \text{tr}(u \circ u_p))$. Si $u, v \in G$ sont tels que $\varphi(u) = \varphi(v)$ alors l'application $u \circ v^{-1} - \text{Id}$ est nilpotent. Si tous les éléments de G sont diagonalisables alors φ est injective.

Théorème 32. (Burnside) Soit G un sous groupe de $GL(E)$, on a les équivalences suivantes :

1. G est fini
2. G est d'exposant fini
3. $\text{tr}(G)$ est fini et tous ses éléments sont diagonalisables.

Ils peuvent également étudier les sous-groupes compacts maximaux et les sous-groupes fermés de GL_{pnq} .

Dev 1 : GLN DOC 20

Dev 2 : Nilpotence et Burnside 30, 31 et 32

Références

- [17] Jean Étienne ROMBALDI : Mathématiques pour l'Agrégation : Algèbre géométrie. De Boeck Supérieur, 2017.

RAPPORT DU JURY :

Les premières définitions et propriétés générales du groupe linéaire doivent être présentées : familles de générateurs, liens avec le pivot de Gauss, sous-groupes remarquables. Il est important de savoir faire correspondre certains sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc.). Il faut aussi savoir réaliser S_n dans GL_n^p , $\mathbb{K}^q$ et faire le lien entre signature et déterminant. Il est souhaitable de dégager des propriétés particulières selon le corps de base, en particulier sa cardinalité lorsque le corps $\mathbb{K}$ est fini et les propriétés topologiques de ce groupe lorsque le corps est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent exploiter le fait que la théorie des représentations permet d'illustrer l'importance de GL_n^p , $\mathbb{C}^q$ et de son sous-groupe unitaire.