Leçon 241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Les fonctions seront définies sur X un espace métrique, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une série de fonctions de terme général f_n est la suite des $(\sum_{k=0}^{n} f_k)_n$.

1. Etudes des suites et séries de fonctions. —

1. *Différentes convergences.* —

- Def : Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme.
- Rem : CV unif implique CV simple. Contre-exemple : $f_n(x) = x^n$, $g_n = \chi_{[n,n+1]}$ qui ne convergent pas uniformément.
- Théorème de Cauchy uniforme : La suite $(f_n)_n$ converge uniformément ssi elle est uniformément de Cauchy. La topologie de la convergence uniforme est celle de la norme $\|.\|_\infty$.
- Def : Convergence normale. Une série de fonctions est normalement convergente ssi $\sum_n \|f_n\|_\infty$ est convergente. (on majore uniformément chaque $|f_n|$ par une constante a_n dont la série est convergente)
- Pro : La convergence normale d'une série de fonctions implique sa convergence uniforme.
- Contre-ex : $\sum_n \frac{1}{n+1}\chi_{[n,n+1[}$ est une série de fonctions qui CV unif sur $\mathbb{R}$ mais pas normalement.

2. *Propriétés de la limite.* —

- Thm : Une limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.
- Thm : Si les $f_n : [a,b] \to \mathbb{K}$ sont C^1, convergent simplement en un x_0, et si les f_n' convergent uniformément sur $[a,b]$ vers g, alors f_n converge vers f une fonction de classe C^1 telle que $f' = g$.
- Ex : $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ est une série normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{R}$, ainsi que toutes ses séries dérivées. Sa limite, noté exp, est donc une fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ tout entier, qui vérifie de plus $exp' = exp$.
- Contre-ex : Suite de fonctions C^1 qui CV unif et dont la limite n'est pas C^1.
- Théorèmes de Dini : Soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ suite de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction f continue. Si la suite des f_n est croissante, alors la convergence est uniforme.
  Ou bien, si les f_n sont des fonctions croissantes et f est continue, alors la convergence est uniforme.
- Ex : $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ converge uniformément vers $exp(x)$.
- Contre-ex : $f_n(x) = 1 - x^n$ sur $[0,1]$. Les f_n sont une suite croissante de fonctions croissantes qui cv simplement, mais leur limite n'est pas continue et la cv ne peut donc pas être uniforme.
- Contre-ex : $f_n = \frac{1}{nx}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas uniformément.
- Théorème de Weierstrass (Résultat de densité)
- Théorème de sélection de Helly : Pour E un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ et f_n suite de fonctions sur E bornées par 1, il existe une suite extraite qui converge simplement sur E.

3. *Quelques liens avec l'intégration.* —

- Théorème de Beppo-Lévi : Une suite croissante f_n de fonctions mesurables sur un espace (E, A, μ) à valeurs dans $[0, +\infty]$ est de limite simple f mesurable, et on a : $\int_E f d\mu = \lim_n (\int_E f_n d\mu)$.
- Cor : Si $\int_E f_n d\mu$ est majorée, alors f est intégrable. A la place d'une suite croissante f_n on peut se donner une série $\sum_n g_n$ de fonctions positives ou nulles.
- Appli : Lemme de Fatou : Pour f_n mesurables à valeurs réelles, $\int_E (\liminf f_n) \leq \liminf(\int_E f_n)$.
- Théorème de convergence dominée : Si, pour une suite f_n à valeurs complexes convergeant simplement vers une fonction f, on a $|f_n - x)| \leq g(x)$ avec g intégrable, alors les f_n sont intégrables et $\int_E |f_n - f| d\mu \to 0$, càd : $\int_E f d\mu = lim_n (\int_E f_n d\mu)$.
- Appli : Pour f intégrable, et $x_n \to x$, on montre que $\widehat{f}(x_n) \to \widehat{f}(x)$. Donc la transformée de Fourier de f est continue.
- Contre-ex du Hauchecorne.
- Définition de D_N,F_N.
- Ex : $lim(\int_0^n (1 - \frac{x}{n})^l n(x) dx) = \int_{\mathbb{R}} exp(-x) ln(x) dx$.
- **Dev** : Théorème de Féjer : La suite des F_N est une approximation de l'unité et $F_N * f = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$ converge uniformément vers f pour tout f $2\pi - périodique$ continue.
  Si f admet juste une limite à droite et à gauche en tout point, alors $F_N * f(x) \to_N \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ ponctuellement.
  Les polynômes trigonométriques sont denses dans $C^0(\mathbb{T})$ pour $\|.\|_\infty$, donc denses dans les $L^p(\mathbb{T})$, car $C^0(\mathbb{T})$ y est dense pour la norme L^p.

2. Séries entières et holomorphie. —

1. *Définition, rayon de convergence.* —

- Def : On appelle série entière une série de fonctions de la forme $\sum_n a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$.
- Def : Rayon de convergence : $R = \sup(r > 0 \text{ tq } \sum_n |a_n| r^n)$ converge.
- Def : Convergence normale d'une série : La série $\sum_n b_n$ CV normalement ssi $\sum_n |b_n|$ CV.
- Lemme d'Abel : Pour tout $r < R$, $\sum_n a_n r^n$ converge normalement. Pour tout $r > R$, $\sum_n a_n r^n$ diverge grossièrement.
- Ex : Pour $a_n = 1$, $R = 1$ et on ne converge pas en $r = 1$. Pour $a_n = \frac{1}{n^2}$, $R = 1$ et on converge en $R = 1$.

- Ex : $\sum_n n^a z^n$ a un rayon de convergence de 1. $\sum_n n! z^n$ a un rayon de convergence nul.

- Comme $exp(x) = \sum_n \frac{z^n}{n!}$ est de rayon de convergence $R = +\infty$, on peut alors définir cos et sin comme des séries entières.
- Théorème d'Abel angulaire. Théorème taubérien faible.

2. *Régularité des séries entières.* —

- La somme d'une série entière est analytique sur son disque de convergence (égale à la somme d'une série entière localement en tout point du disque de convergence). Elle est ainsi holomorphe, càd $\mathbb{C}$-dérivable.
- Thm : Les fonctions holomorphes sont analytiques.
- Rem : Pour une fonction holom donnée par la somme d'une série entière, on cherche souvent à la prolonger sur un domaine plus grand. Ex : $\sum_n z^n = \frac{1}{1-z}$.
- Il y a au moins un point du bord du disque de convergence en lequel la somme d'une série entière ne se prolonge pas holomorphiquement.
- Pro : Théorème des lacunes de Hadamard : Pour $\sum_n a_n z^{\lambda_n}$ lacunaire avec $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > \alpha > 1$, il n'y a aucun point du bord du disque de convergence en lequel la somme de la série se prolonge holomorphiquement.
- Ex : $\sum_n \frac{1}{n^2} z^{2^n}$ se prolonge continûment à $\overline{\mathbb{D}}$ mais n'admet aucun prolongement analytique.

3. Séries de Fourier. —

- Def : Série trigonométrique : une série de fonctions de la forme $c_n e^{int} + c_{+n} e^{-int}$
- Pro : Critère de convergence : Si les suites $(c_n)_n$ et $(c_{-n})_n$ sont réelles et décroissantes vers 0, alors la série trigonométrique converge simplement sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et uniformément sur tout $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$.
- Def : Pour f de carré intégrable et 2π-périodique, la série de Fourier de f est la série trigonométrique $\sum_n c_n(f) e_n(t)$, où $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$.
- Pro : Les $(e_n)_n$ forment une famille orthonormée pour $< f, g >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)} dt$, elle cette famille est dense dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. C'est donc une base orthonormée de cet espace de Hilbert.
- Thm : Egalité de Parseval : $\sum_n |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$, si f est de carré intégrable.
- Théorème de Jordan-Dirichlet : Pour f continue par morceaux et 2π-périodique, admettant une lim à gauche et à droite en tout point, $\sum_n c_n(f) e^{int} \to \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$.
- Théorème : Si f est continue, 2π-périodique, et C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f.
- **Dev** : Equation de la chaleur sur le cercle : Pour $u_0 \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, l'équation différentielle $\partial_t u - \partial_x(\partial_x u) = 0$ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ admet une unique solution f de classe C^2 telle que $f(t, .) \to_{t \to 0^+} u_0$ dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.
  C'est pour résoudre des équations de cette forme que la théorie de Fourier a été inventée.
- Ex : Pour f $2-\pi$-périodique, paire, telle que $f(x) = \chi_{[0,\pi/2[} - \chi_{]\pi/2,\pi]}$ sur$[0,\pi]$, la formule de Parseval donne : $\sum_k \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. On en déduit $\sum_k \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- Ex : Pour f $2-\pi$-périodique, paire, telle que $f(x) = |x|$ sur $]-\pi, \pi[$, la formule de Parseval nous donne : $\sum_k \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$. On en déduit $\sum_k \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.
- App : Formule sommatoire de Poisson : Soit f de classe C^1 telle telle que $f(x) = O(\frac{1}{x^2})$ et $f'(x) = O(\frac{1}{x^2})$.
  Alors la fonction $S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+n)$ est bien définie, continue, et 1-périodique, et la fonction $f^*(n) = \int_{\mathbb{R}} f(x).e^{-2i\pi nx} dx$ est bien définie, et l'on a : $S(t) = \frac{1}{a}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f^*(n)$
- Corollaire du Gourdon.

4. Séries de Dirichlet. —

- Définition d'une série de Dirichlet.
- Def : Abscisse de convergence σ_c, de convergence absolue σac.
- Pro : $\sigma_c \leq \sigma ac$
- Holomorphie d'une série de Dirichlet sur $\{Re(z) > \sigma_{ac}\}$.
- Ex : Fonction ζ de Riemann : $\zeta(z) = \sum_n \frac{1}{n^z}$, avec $\sigma_{ac} = 1$.
- Multiplication de séries de Dirichlet.
- App : $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_n \frac{\mu(n)}{n^s}$.

Références

Gourdon : Modes de convergence. Séries entières. Séries de Fourier. Exemples.
Hauchecorne : Contre-Exemple de suites,séries ayant des problèmes.
Zuily, Queffélec : Théorème de Weierstrass.. Séries de Dirichlet. Théorème de Féjer(Dev).
Candelpergler : Equation de la chaleur sur le cercle(Dev).
Briane, Pagès : Beppo-Lévi et Fatou et CV dominée.
Francinou,Gianella, Analyse 2 : Théorème de sélection de Helly.

May 9, 2017
Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes