

Développement : Théorème de Riez Fisher ou autrement dit complétude de L^p

Référence : De l'intégration aux probabilités, GARET, KURTZMANN, page 191-192 et Mathématiques pour l'agrégation : Analyse, ROMBALDI, pages 160-161

Leçon : 201, 205, 208 et 234.

Théorème :

Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $(L^p(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach

Démonstration. Soit (f_n) une suite d'éléments de L^p avec

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_p < +\infty.$$

On note g_n un représentant de f_n , donc $g_n \in \mathcal{L}^p$. On va montrer qu'il existe une fonction g dans $\mathcal{L}^p$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{k=0}^n g_k - g \right\|_p = 0,$$

ce qui donnera la convergence de la suite $(\sum_{k=0}^n f_k)$ vers la classe de g .

Supposons dans un premier temps que les g_k sont positives. Dans ce cas, la suite de fonctions

$$S_n = \sum_{k=0}^n g_k$$

converge simplement vers une fonction g mesurable éventuellement infinie en certains points.

Montrons que $g \in \mathcal{L}^p$: On a par convergence monotone (Beppo-Levi)

$$\|g\|_p^p = \int_X g^p d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^p d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n\|_p^p.$$

Or, par inégalité triangulaire,

$$\|S_n\|_p = \left\| \sum_{k=0}^n g_k \right\|_p \leq \sum_{k=0}^n \|g_k\|_p \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|g_k\|_p = \sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_p < +\infty.$$

Ainsi $g \in \mathcal{L}^p$.

Montrons que (S_k) converge vers g dans $\mathcal{L}^p$:

Soit $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq k$, on a que

$$S_n - S_k = \sum_{l=k+1}^n g_l$$

Donc, la suite $(S_n - S_k)_{n \geq k}$ est croissante de fonctions mesurables positives convergent presque partout vers $g - S_k$. Par le théorème de convergence monotone :

$$\|g - S_k\|_p^p = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X (S_n - S_k)^p d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n - S_k\|_p^p.$$

Or par inégalité triangulaire

$$\|S_n - S_k\|_p = \left\| \sum_{l=k+1}^n g_l \right\|_p \leq \sum_{l=k+1}^n \|g_l\|_p \leq \sum_{l=k+1}^{+\infty} \|g_l\|_p$$

D'où

$$\|g - S_k\|_p^p \leq \left(\sum_{l=k+1}^{+\infty} \|g_l\|_p \right)^p.$$

Or, $\sum \|g_k\|_p$ converge par hypothèse donc le membre de droite, qui est le reste de cette série, converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit donc que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|g - S_k\|_p^p = 0.$$

Passons au cas générale où les g_k ne sont plus supposés positives :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on écrit $g_k = g_k^+ - g_k^-$ où $g_k^+ = \max(g_k, 0)$ et $g_k^- = \max(-g_k, 0)$, puis on définit

$$S_n^+ := \sum_{k=0}^n g_k^+ \quad \text{et} \quad S_n^- := \sum_{k=0}^n g_k^-.$$

On a $\|g_k^+\|_p \leq \|g_k\|_p$ et $\|g_k^-\|_p \leq \|g_k\|_p$ donc,

$$\sum_{k=0}^n \|g_k^+\|_p < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \|g_k^-\|_p < +\infty.$$

De plus, par le cas positif, la suite (S_n^+) converge vers une fonction g^+ et la suite (S_n^-) converge vers une fonction g^- , toutes deux dans $\mathcal{L}^p$.

Posons $g := g^+ - g^-$. On a par inégalité triangulaire

$$\|g - S_n\|_p \leq \|g^+ - S_n^+\|_p + \|g^- - S_n^-\|_p$$

. Donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g - S_n\|_p = 0.$$

Ainsi (S_n) converge vers g dans $\mathcal{L}^p$

On en conclut donc en notant f la classe de g , on a que $(\sum_{k=0}^n f_k)$ converge vers f dans L^p .

Toutes série absolument convergente est convergente, on en déduit donc que L^p est complet pour $1 \leq p < +\infty$

Remarque : Soit $\tilde{g}_k$ un autre représentant de f_k . Alors il existe un ensemble négligeable $N(k)$ tel que pour tout $x \in X \setminus N(k)$

$$g_k(x) = \tilde{g}_k(x).$$

De plus, il existe N_1 et N_2 négligeables telle que :

$$\forall x \in X \setminus N_1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n g_k(x) = g(x) < +\infty$$

et

$$\forall x \in X \setminus N_2, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \tilde{g}_k(x) = \tilde{g}(x) < +\infty$$

Posons

$$N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N(k) \bigcup N_1 \bigcup N_2$$

Alors N est négligeable et pour tout $x \in X \setminus N$

$$g_k(x) = \tilde{g}_k(x), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n g_k(x) = g(x) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \tilde{g}_k(x) = \tilde{g}(x).$$

Ainsi, pour $x \in X \setminus N$

$$g(x) - \tilde{g}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (g_k(x) - \tilde{g}_k(x)) = 0.$$

□

Théorème :

Le résultat reste vraie quand $p = +\infty$.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy de L^∞ . On note g_n un représentant de f_n . Donc, (g_n) est de Cauchy dans $\mathcal{L}^\infty$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe n_k tels que pour tout entiers $m > n \geq n_k$,

$$\|g_m - g_n\|_\infty < \frac{1}{k}.$$

Il existe alors un mesurable $A_{n,m}^k$ de mesure nulle tel que pour tout $m > n \geq n_k$ et $x \in X \setminus A_{n,m}^k$

$$|g_m(x) - g_n(x)| \leq \|g_m - g_n\|_{\infty, ess} < \frac{1}{k}$$

Ainsi posons le mesurable

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{m > n \geq n_k} A_{n,m}^k.$$

Alors A est de mesure nulle. De plus pour tout $x \in X \setminus A$, la suite $(g_n(x))$ est de Cauchy. Ainsi, elle converge vers $g(x)$.

La fonction g définie sur X par

$$g(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) & \text{si } x \in X \setminus A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

est alors mesurable telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier n_k tel que pour tout $n \geq n_k$ et $x \in A$, on a

$$|g(x) - g_n(x)| < \frac{1}{k},$$

ce qui implique

$$\|g - g_n\|_\infty < \frac{1}{k}.$$

On a donc ainsi montré que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g - g_n\|_\infty = 0,$$

soit que (f_n) est converge vers la classe de g dans L^∞

□