

Leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

I) Actions de groupe

1) Agir sur un ensemble [ULM,BER]

- Correspondance avec les morphismes
- Relation d'équivalence

2) Caractéristiques d'une action [BER]

- Stabilisateur (+ c'est un sg de G)
- Orbite et lien avec transitivité
- Point fixe
- Fidélité et transitivité d'une action
- Il suffit de quotienter par le noyau pour avoir une action fidèle

3) Formule des classes [BER]

- Relation orbite/stabilisateur
- Formule des classes
- Formule de Burnside
- App : Espérance point fixe d'une v.a
- Théorème de Dixon

II) Agir pour mieux connaître le groupe

1) Action par conjugaison [BER]

- Définition p-groupe
- Equation p-groupe
- Le centre d'un p-groupe n'est pas trivial
- Classification des groupes d'ordre p^2
- Pour chaque diviseur du cardinal d'un p -groupe, il existe un sg de ce card

2) Action par translation [PER,ULM]

- L'action est fidèle
- Theorème de Cayley et plongement dans GL_n
- G agit sur G/H par translation
- CS pour qu'un sg soit distingué
- Théorème de Lagrange et $|G/H|$
- Théorème de Cauchy

3) Application aux théorèmes de Sylow [BER]

- Définition p-Sylow
- Cardinal de $GL_n(\mathbb{F}_q)$
- Théorèmes de Sylow
- Tout groupe d'ordre 33 est cyclique

III) Agir pour mieux connaître l'ensemble : cas des matrices [ROMB]

1) Action par translation

- Translation à gauche : le noyau est un invariant total, on agit sur les lignes
- Translation à droite : l'image est un invariant total, on agit sur les colonnes
- Décomposition polaire
- Toute orbite contient une matrice échelonnée

2) Action par conjugaison

- Etre dans la même orbite = être semblables
- Deux matrices semblables ont même rang, déterminant, trace et polynôme caractéristique
- Une matrice est dz ssi elle est dans la même orbite qu'une matrice diagonale
- Dans $\mathbb{C}$, l'orbite est fermée ssi la matrice est dz

3) Sur les corps finis

- Dénombrement des matrices dz