

Leçon 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

I) Ensembles et fonctions convexes

1) Définitions [GOU]

- Ensemble convexe
- Boules, intervalles de $\mathbb{R}$, evn
- Fonction convexe

2) Régularité et caractérisation des fonctions convexes [ROMAnR]

- Epigraphe
- Fonction convexe ssi courbe en dessous des tangentes
- Inégalité des pentes et "taux d'accroissement"
- Fonction affine ssi convexe et concave
- Fonction cvx sur I est continue sur $\overset{\circ}{I}$
- Cas où f est dérivable et exemples

3) Convexité dans $\mathbb{R}^n$ [BECK,GOU]

- Critères de convexité à l'aide du gradient et de la hessienne

4) Fonctions log-convexe [ROMAnR]

- Log convexe $\Rightarrow$ convexe
- Théorème de Bohr-Mollerup

II) Inégalités

1) Inégalités classiques [ROMAnR]

- exp, ln, sin
- Young
- Hölder
- Inégalité arithmético-géométrique
- Jensen discret
- Espérance d'une variable aléatoire

2) Inégalités dans les espaces L^p [BP]

- Jensen continu
- App : espérance
- Hölder
- Minkowski
- Cor : $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un evn

III) Optimisation

1) Projection sur un convexe [LI]

- Théorème de projection
- La projection est continue
- Si F est fermé : $H = F \oplus F^\perp$
- Cor : $F \subset H$ dense $\iff F^\perp = \{0\}$
- Théorème de représentation de Riesz [HIL]

2) Optimisation de fonctions convexes [ROMAnR]

- f cvx + f dérivable en $a \in \overset{\circ}{I}$ + $f'(a) = 0 \Rightarrow f$ admet un minimum global en a
- f cvx + min local $\Rightarrow$ min global
- Optimisation dans un Hilbert

Annexe : Ensemble convexe/pas convexe, fonction convexe, inégalité des pentes, inégalités ln et exp, projection sur un convexe fermé.