

Développement : Théorème de Dini (2ème) et Glivenko Cantelli

Référence : Gourdon Analyse pour Dini et Glivenko Cantelli au feeling ;)

Leçon : 241, 261 et 262.

Théorème :

Soit $f_n, f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

1. f est continue sur $[0, 1]$;
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante ;
3. Pour tout $x \in [0, 1]$

$$f_n(x) \rightarrow f(x).$$

Alors

$$\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction f est continue sur $[0, 1]$ qui est compact alors d'après le théorème de Heine f est uniformément continue. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0, 1], |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

On considère ensuite une subdivision $a = 0 < x_1 < \dots < x_p = 1$ de $[0, 1]$ de pas $< \eta$. Pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$, la suite $(f_n(x_i))$ tend vers $f(x_i)$, on en déduit qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, \forall i \in \{0, \dots, p\}, |f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

Ceci étant, considérons $x \in [0, 1]$. Il existe $i \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $x \in [x_i, x_{i+1}]$, et les fonctions (f_n) et f étant croissantes

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x_i) \leq f_n(x) \leq f_n(x_{i+1}) \quad \text{et} \quad f(x_i) \leq f(x) \leq f(x_{i+1}),$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_i) - f_n(x_{i+1}) \leq f(x) - f_n(x) \leq f(x_{i+1}) - f_n(x_i).$$

Or pour tout $n \geq N$,

$$|f(x_{i+1}) - f_n(x_i)| \leq |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_n(x_i)| < 2\varepsilon$$

de même $|f(x_i) - f_n(x_{i+1})| < 2\varepsilon$. On en déduit que

$$|f(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon,$$

et ceci pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in [0, 1]$, d'où le résultat. $\square$

Théorème :

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. et de fonction de répartition F . On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\hat{F}_n - F\|_\infty = 0 \text{ p.s.}$$

Démonstration. ★ Convergence p.s. de $\hat{F}_n$. Par la loi forte des grands nombres, pour $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{F}_n(x) = \mathbb{E}[1_{X_1 \leq x}] = F(x)$$

★ Regardons dans un premier temps le cas ou $X_1 \sim \mathcal{U}([0, 1])$, $F(x) = x$ si $x \in [0, 1]$.

On a F et $\hat{F}_n, n \in \mathbb{N}$ sont croissantes sur $[0, 1]$. Soit $x \in [0, 1]$ Il existe $N(x) \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(N(x)) = 0$ tels que

$$\forall \omega \notin N(x), \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{F}_n(x, \omega) = F(x).$$

Or

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} N(x) \right) \leq \sum_{x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} \mathbb{P}(N(x)) = 0$$

Ainsi si $\omega \notin N$, $\forall x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{F}_n(x, \omega) = F(x)$$

Si maintenant $x \in [0, 1]$, il existe $(x_n), (y_n)$ des suites de $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ tel que $x_m \rightarrow x$ en croissance et $y_m \rightarrow y$ en décroissance quand n tend vers $+\infty$.

Comme $\hat{F}_n$ est croissante, on a pour $\omega \notin N$

$$\hat{F}_n(x_m, \omega) \leq \hat{F}_n(x, \omega) \leq \hat{F}_n(y_m, \omega).$$

Ainsi en passant a la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient pour tout m ,

$$F(x_m) \leq \liminf \hat{F}_n(x, \omega) \leq \limsup \hat{F}_n(x, \omega) \leq F(y_m)$$

Comme F est continue sur $[0, 1]$, on a en passant a la limite quand $m \rightarrow +\infty$:

$$\liminf \hat{F}_n(x, \omega) = \limsup \hat{F}_n(x, \omega) = F(x)$$

Donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{F}_n(x, \omega) = F(x)$$

Ainsi par le théorème de Dini, on obtient pour tout $\omega \notin N$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0, 1]} |\hat{F}_n(x, \omega) - F(x)| = 0$$

Or, presque sûrement.

$$\|\hat{F}_n - F\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |\hat{F}_n(x) - F(x)|$$

Ainsi on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\hat{F}_n - F\|_\infty = 0 \text{ p.s.}$$

★ Passons au cas général X_1 est une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F . On définit l'inverse généralisé par : pour $p \in (0, 1)$,

$$F^-(p) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq p\}.$$

On a

$$A_p := \{x \in \mathbb{R}, F^-(p) \leq x\} = \{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq p\} := B_p.$$

En effet, soit $p \in (0, 1)$, si $x \in B_p$ donc $x \geq \inf B_p = F^-(p)$ donc $x \in A_p$. Réciproquement, si $x \in A_p$. Comme F est croissante, on B_p est une demi-droite

$$B_p =]F^-(p), +\infty[\quad \text{ou} \quad B_p = [F^-(p), +\infty[.$$

De plus F est continue à droite, donc

$$B_p = [F^-(p), +\infty[$$

Donc si $x \geq F^-(p)$ alors, $x \in B_p$

On en déduit que si $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$, pour $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(F^-(U) \leq x) = \mathbb{P}(F(x) \geq U) = F(x).$$

On a donc

$$F^-(U) = X_1 \text{ en loi.}$$

Et donc si $U_1, \dots, U_n \sim \mathcal{U}([0, 1])$ i.i.d alors

$$(F^-(U_1), \dots, F^-(U_n)) = (X_1, \dots, X_n) \text{ en loi.}$$

De plus

$$\begin{aligned} D_n &:= \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{X_i \leq x} - F(x) \right| \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{U_i \leq F(x)} - F(x) \right| \text{ en loi.} \end{aligned}$$

On pose

$$\tilde{D}_n := \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{U_i \leq F(x)} - F(x) \right|$$

On a

$$\tilde{D}_n \leq \sup_{y \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{U_i \leq y} - F_U(y) \right|$$

D'après ce qui précède :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{U_i \leq y} - F_U(y) \right| = 0 \text{ p.s.}$$

On en déduit que $\tilde{D}_n \rightarrow 0$ p.s.

Or, on peut remarquer que $D_n = \tilde{D}_n$ en loi mais également pour tout n

$$(D_1, \dots, D_n) = (\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_n) \text{ en loi}$$

En effet on

$$(D_1, \dots, D_n) = \varphi((U_1, \dots, U_n)) \quad \text{et} \quad (\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_n) = \varphi((F^-(U_1), \dots, F^-(U_n)))$$

Soit $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(\limsup\{D_n > \varepsilon\}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_n \bigcup_{m \geq n} \{D_m > \varepsilon\}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{m \geq n} \{D_m > \varepsilon\}\right)$$

Or,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{m \geq n} \{D_m > \varepsilon\}\right) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{m \geq n}^M \{D_m > \varepsilon\}\right) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{m \geq n}^M \{\tilde{D}_m > \varepsilon\}\right)$$

Alors

$$\mathbb{P}(\limsup\{D_n > \varepsilon\}) = \mathbb{P}(\limsup\{\tilde{D}_n > \varepsilon\}) = 0$$

On pose $N(\varepsilon) = \limsup\{D_n > \varepsilon\}$. On a $\mathbb{P}(N(\varepsilon)) = 0$. On pose

$$N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} N\left(\frac{1}{k}\right)$$

On a $\mathbb{P}(N) = 0$. Ainsi si $\omega \notin N$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\limsup D_n(\omega) \leq \frac{1}{k}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n(\omega) = 0$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\hat{F}_n - F\|_\infty = 0 \text{ p.s.}$$

□