

Développement : Fonction caractéristique de la loi de Cauchy

Référence : De l'intégration au probabilité, GARET, page

Leçon : 236, 239, 245, 250 et (261 peut-être).

Théorème : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+$ et soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy $C(a, b)$. Alors la fonction de caractéristique de X est la fonction :

$$\begin{aligned} \phi_X : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ t &\longmapsto e^{ita} e^{-b|t|} . \end{aligned}$$

Démonstration. (pour les leçons 236, 239, 250, 261)

Rappelons qu'une variable aléatoire qui suit une loi de Cauchy $C(a, b)$ admet comme densité par rapport à la mesure de Lebesgue la fonction :

$$\begin{aligned} g_X : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{\pi} \frac{b}{(x-a)^2 + b^2} . \end{aligned}$$

On va déjà calculer la fonction caractéristique de la loi de Cauchy $C(0, 1)$. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Cauchy $C(0, 1)$

Il existe différentes manières de la calculer (théorème des résidus). Nous ici on va utiliser la formule d'inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$.

Posons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto e^{-|x|} . \end{aligned}$$

On a que $f \in L^1(\mathbb{R})$. En effet, soit $M > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M |e^{-|x|}| dx &= \int_{-M}^M e^{-|x|} dx \\ &= 2 \int_0^M e^{-x} dx \\ &= 2 [-e^{-x}]_0^M \\ &= 2 - e^{-M} . \end{aligned}$$

Donc,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-|x|}| dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^M |e^{-|x|}| dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} 2 - e^{-M} = 2 < +\infty .$$

Calculons la transformée de Fourier de f . Soient $t \in \mathbb{R}$ et $M > 0$

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M f(x) e^{-itx} dx &= \int_{-M}^M e^{-|x|} e^{-itx} dx \\ &= \left[-\frac{e^{-(it+1)x}}{it+1} \right]_0^M + \left[-\frac{e^{-(it-1)x}}{it-1} \right]_{-M}^0 \\ &= \frac{1}{it+1} - \frac{1}{it-1} - \frac{e^{-(it+1)M}}{it+1} + \frac{e^{(it-1)M}}{it-1} . \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-itx} dx \\
&= \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^M f(x) e^{-itx} dx \\
&= \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{it+1} - \frac{1}{it-1} - \frac{e^{-(it+1)M}}{it+1} + \frac{e^{(it-1)M}}{it-1} \\
&= \frac{1}{it+1} - \frac{1}{it-1} \\
&= \frac{2}{t^2+1}.
\end{aligned}$$

Montrons que $\hat{f}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$: soit $M > 0$

$$\int_{-M}^M |\hat{f}(x)| dx = \int_{-M}^M \frac{2}{t^2+1} dx = 4 \int_0^M \frac{1}{t^2+1} dx = 4 [\arctan(t)]_0^M = 4 \arctan(M).$$

Donc, en passant à la limite quand $M \rightarrow +\infty$, on obtient que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)| dx = 2\pi < +\infty.$$

Par le théorème d'inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$, on obtient que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \hat{f}(t) dt \text{ pour presque tout } x.$$

Donc, pour presque que tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
e^{-|x|} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \frac{2}{t^2+1} e^{itx} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\pi} \frac{1}{t^2+1} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} g_X(t) dt \\
&= \phi_X(x).
\end{aligned}$$

L'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\phi_X(x) \neq e^{-|x|}$ est un ouvert. En effet, la fonction $h : x \rightarrow \phi_X(x) - e^{-|x|}$ est continue sur $\mathbb{R}$ de plus, on a que $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ donc $h^{-1}(\{0\})$ est un ferme de $\mathbb{R}$ donc son complémentaire est un ouvert.

Comme il est de mesure nulle, il est vide, ce qui nous donne que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(x) = e^{-|x|}.$$

Revenons a notre cas générale, soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+$ et soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy $C(0, 1)$, alors la variable aléatoire Y définie par $Y = bX + a$ suit une loi de Cauchy $C(a, b)$. De plus en utilisant, le théorème 11, on obtient que

$$\phi_Y(t) = e^{iat} \phi_X(bt) = e^{iat} e^{-b|t|}$$

□

Démonstration. Commençons par calculer la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{C}(0, 1)$ qui est

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{x^2 + 1} dx.$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+$ pour commencer. On définit la fonction holomorphe

$$f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \frac{e^{itz}}{1 + z^2}.$$

Pour $R > 1$, on définit le contour Γ par l'union des deux chemins suivants : le chemin $\gamma_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ qui est défini par $\gamma_1(t) = Re^{it}$ et le chemin $\gamma_2 : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}$ qui est défini par $\gamma_2(t) = t$. Ce contour est décrit sur la figure ci-dessous.

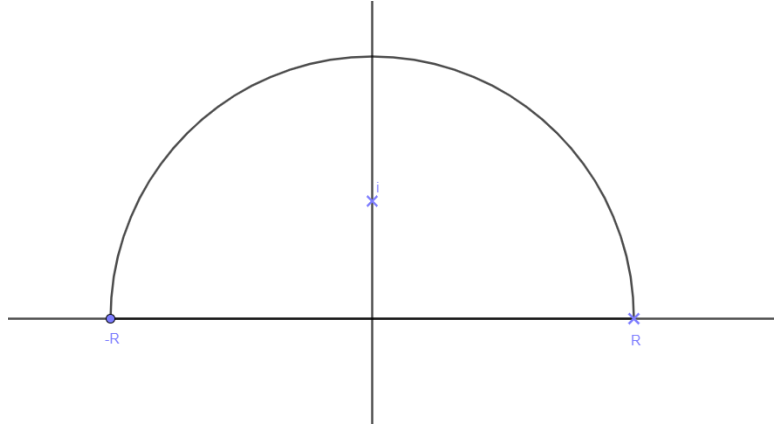


FIGURE 1 – Description du contour pour la méthode des résidus.

L'unique pôle de f dans ce contour est i . Ainsi d'après le théorème des résidus on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \text{Res}_i f(x) \text{Ind}_\gamma(i).$$

Comme l'indice vaut 1, il reste à calculer ce résidu et l'intégrale.

Comme le point i est un pôle d'ordre 1 de f , alors

$$\begin{aligned} \text{Res}_i f &= \lim_{z \rightarrow i} (z - i) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{e^{itz}}{(z - i)(z + i)} \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{itz}}{z + i} \\ &= \frac{e^{i^2 t}}{2i} = -ie^{-t}/2. \end{aligned}$$

De plus,

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq 1/(1+x^2)$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx$$

Or cette dernière intégrale est celle qu'on cherche à calculer.

Montrons maintenant que $\int_{\gamma_1} f(z) dz$ converge vers 0 : soit $z = Re^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, \pi]$. Alors, comme $t \geq 0$ et comme $\sin(\theta) \geq 0$,

$$|f(Re^{i\theta})ie^{i\theta}| = \frac{|e^{itRe^{i\theta}}|}{|1 + (Re^{i\theta})^2|} = \frac{e^{-Rt \sin(\theta)}}{|1 + R^2 e^{i2\theta}|} \leq \frac{1}{R^2 - 1}$$

car $|R^2 e^{i2\theta}| - 1 \leq |1 + R^2 e^{i2\theta}|$ d'après l'inégalité triangulaire renversée. D'après le théorème de convergence dominée, on en déduit que $\int_{\gamma_1} f(z) dz$ converge vers 0 lorsque R tend vers l'infini. On conclut que

$$\varphi(t) = e^{-t}$$

pour tout $t \geq 0$. Comme la loi est symétrique, on en déduit que $\varphi(t) = e^{-|t|}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Pour conclure, on définit $Y = bX + a$ où X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{C}(0, 1)$. Ainsi Y est de loi $\mathcal{C}(a, b)$ en calculant sa densité de probabilités. De plus :

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{itY}] = \mathbb{E}[e^{it(bX+a)}] = e^{iat} \mathbb{E}[e^{itbX}] = e^{iat} \varphi_X(bt) = e^{iat} e^{-b|t|}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

□