

Développement : Théorème de Weierstrass - preuve probabiliste

Référence : Carnet de voyage en Analystan, Caldero page 321-324

Leçon : 201, 203, 209, 228 et (264 peut-être).

Remarque : Le jour de l'oral ne faire que les étapes de 2 à 7.

Définition :

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle n -ième polynôme de Bernstein associé à f le polynôme pour $x \in [0, 1]$:

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Proposition :

Soit f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. La suite de fonctions $(B_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Théorème : (de Weierstrass)

L'ensemble des fonctions polynomiales à valeurs dans $\mathbb{R}$ sur un segment $[a, b]$ est dense pour la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ dans l'ensemble des fonctions continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Corollaire :

On a le même résultat en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit g une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

★ **Étapes n°1 :** On se ramène au cas où $[a, b] = [0, 1]$.

Posons l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(bx + a(1-x)) \end{aligned}.$$

On a que f est une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

★ **Étapes n°2 :**

Comme $[0, 1]$ est compacte par le théorème de Heine, on a que f est uniformément continue sur $[0, 1]$.

Soit $\varepsilon > 0$, par l'uniformément continuité il existe $\delta > 0$ tels que pour tout $x, y \in [0, 1]$,

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

★ **Étapes n°3 :**

Soit $x \in [0, 1]$.

Soit $(X_i)_i$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toute une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(x)$. Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n = \sum_{k=0}^n X_k.$$

On a que $S_n \sim \mathcal{B}(n, x)$.

$$\mathbb{E} \left[\frac{S_n}{n} \right] = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right)$$

De plus,

$$\mathbb{E} \left[\frac{S_n}{n} \right] = x.$$

En utilisant le théorème de transfert et $\frac{S_n}{n}$ est à valeur dans $[0, 1]$, on obtient que :

$$\mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n}{n} \right) \right] = \sum_{k=0}^n f \left(\frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \mathcal{B}_n(f)(x)$$

★ Étapes n°4 :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_n(f)(x) - f(x) &= \mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(x) \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \left[f \left(\frac{k}{n} \right) - f(x) \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

Posons les ensembles

$$A = \left\{ k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta \right\} \text{ et } B = \left\{ k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta \right\}.$$

On a que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_n(f)(x) - f(x) &= \underbrace{\sum_{k \in A} \left[f \left(\frac{k}{n} \right) - f(x) \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{:= S_A(x)} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{k \in B} \left[f \left(\frac{k}{n} \right) - f(x) \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{:= S_B(x)} \end{aligned}$$

★ Étapes n°5 :

$$\begin{aligned} |S_A(x)| &= \left| \sum_{k \in A} \left[f \left(\frac{k}{n} \right) - f(x) \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k \in A} \left| f \left(\frac{k}{n} \right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &< \varepsilon \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

En utilisant le binôme de Newton, on a que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (1-x+x)^n = 1.$$

Donc

$$|S_A(x)| < \varepsilon.$$

★ Étapes n°6 :

$$\begin{aligned}
|S_B(x)| &= \left| \sum_{k \in B} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&\leq \sum_{k \in B} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq 2\|f\|_\infty \sum_{k \in B} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in B} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - x \right| \geq \delta \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - \mathbb{E} \left[\frac{S_n}{n} \right] \right| \geq \delta \right) \\
&\leq \frac{\mathbb{V} \left[\frac{S_n}{n} \right]}{\delta^2} = \frac{\mathbb{V}[S_n]}{n^2 \delta^2} \text{ par Bienaymé-Tchebychev}
\end{aligned}$$

Or, $\mathbb{V}[S_n] = nx(1-x)$ donc

$$\sum_{k \in B} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{n\delta^2} \text{ car } x \in [0, 1].$$

Donc

$$|S_B(x)| \leq 2\|f\|_\infty \frac{1}{n\delta^2}$$

★ Étapes n°7 :

D'après ce qui précède, on obtient pour tout $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mathcal{B}_n(f)(x) - f(x)| \leq |S_A(x)| + |S_B(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{1}{n\delta^2}.$$

Donc en passant au sup sur les $x \in [0, 1]$ on a

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{1}{n\delta^2}.$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2\|f\|_\infty \frac{1}{n\delta^2} = 0,$$

il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$2\|f\|_\infty \frac{1}{n\delta^2} \leq \varepsilon.$$

Ceci implique pour tout $n \geq n_0$

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

La fonction f peut donc être approchée uniformément par une suite polynomiale.

★ **Étapes n°8** : On revient à g .

On a que pour tout $y \in [a, b]$,

$$g(y) = f\left(\frac{y}{b-a} - \frac{b}{b-a}\right).$$

On définit alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $y \in [a, b]$

$$Q_n(y) = \mathcal{B}_n(f)\left(\frac{y}{b-a} - \frac{b}{b-a}\right)$$

Q_n est bien une fonction polynomiale comme composition de fonctions polynomiale.

De plus, pour tout $y \in [a, b]$

$$|g(y) - Q_n(y)| \leq \left| f\left(\frac{y}{b-a} - \frac{b}{b-a}\right) - \mathcal{B}_n(f)\left(\frac{y}{b-a} - \frac{b}{b-a}\right) \right| \leq \|f - B_n(f)\|_{\infty, [0,1]}.$$

Donc en passant au sup sur $[a, b]$ on a que

$$\|g - Q_n\|_{\infty, [a,b]} \leq \|f - B_n(f)\|_{\infty, [0,1]}.$$

□

Remarque : Pour revenir sur $\mathbb{C}$. On approche la partie réels par une suite de polynôme et la partie imaginaire aussi.

Remarque : Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on a

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{S_n}{n} \right] &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-(k+1)} \\ &= x \times 1 = x \end{aligned}$$