

Développement : Équation de Bessel

Référence : Équation différentielle, Berthelin

Leçon : 220, 221 et 243.

Théorème : (Équation de Bessel)

On considère l'équation,

$$t^2 y'' + ty' + t^2 y = 0$$

Une solution développable en série entière est de la forme :

$$y(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n t^{2n}}{4^n (n!)^2}$$

Démonstration. Nous voyons que 0 est un point singulier régulier.

Donc on cherche une solution développable en série entière sous la forme

$$y(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$$

où $a_0 \neq 0$ sur l'intervalle $] -R, R[$ avec R le rayon de convergence.

D'après les propriétés des séries entières y est deux fois dérivable sur $] -R, R[$

Et,

$$y'(t) = \sum_{n \geq 0} n a_n t^{n-1}, y''(t) = \sum_{n \geq 0} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

Ainsi,

$$t^2 y''(t) + ty'(t) = \sum_{n \geq 0} n(n-1) a_n t^n + \sum_{n \geq 0} n a_n t^n = \sum_{n \geq 0} n^2 a_n t^n$$

et

$$t^2 y(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^{n+2} = \sum_{n \geq 0} a_{n-2} t^n$$

avec la convention $a_{-2} = a_{-1} = 0$. On a,

$$t^2 y''(t) + ty'(t) + t^2 y(t) = \sum_{n \geq 0} (n^2 a_n + a_{n-2}) t^n = 0$$

Et donc par unicité du développement en série entière,

$$a_1 = 0 \text{ et } n^2 a_n + a_{n-2} = 0$$

On a donc rapidement que pour tout entier n $a_{2n+1} = 0$

Montrons par récurrence que pour tout entier n plus grand que 1,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} a_0$$

Initialisation : $n = 1$, d'après la formule de récurrence sur a_n

$$2^2 a_2 = -a_0$$

et donc

$$a_2 = \frac{(-1)^1}{2^{2 \times 1}(1!)^2} a_0$$

La propriété est donc initialisé.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} a_0$, Montrons pour $n + 1$, et d'ailleurs en utilisant la relation de récurrence

$$(2n + 2)^2 a_{2n+2} = -a_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2} a_0$$

et donc,

$$a_{2n+2} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2(2n + 2)^2} a_0 = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2(n+1)}((n + 1)!)^2} a_0$$

Donc, on a la propriété par récurrence.

Et finalement on a

$$y(t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} a_0 t^{2n}$$

et donc avec $a_0 = 1$ On a bien,

$$y(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n t^{2n}}{4^n (n!)^2}$$

Il faut maintenant vérifier que le rayon de convergence est satisfaisant, donc on étudie la limite de :

$$\left| \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} \right| = \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}}{\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}} \right| = \left| \frac{-1}{4(n + 1)^2} \right| = \frac{1}{4(n + 1)^2} \rightarrow 0$$

Donc $R = +\infty$ est donc la série est bien définie sur $\mathbb{R}$ est correspond bien à une solution de l'équation différentielle. $\square$