

Développement : Projection orthogonale sur un convexe fermé

Référence : Mathématiques pour l'agrégation externe : Analyse, ROMBALDI, pages 239 - 241

Leçon : 205, 213, 219, 253 (208 peut-être)

Remarque : On ne fait pas le point 3 et pensez à faire un dessin.

Théorème :

Soit $\mathcal{C}$ un convexe fermé non vide dans un espace de Hilbert E .

1. Pour tout $x \in E$, il existe un unique vecteur $p_{\mathcal{C}}(x) \in \mathcal{C}$ tel que :

$$\|x - p_{\mathcal{C}}(x)\| = d(x, \mathcal{C})$$

2. Ce vecteur est également l'unique vecteur appartenant à $\mathcal{C}$ tel que

$$\forall z \in \mathcal{C}, \operatorname{Re}\langle x - p_{\mathcal{C}}(x), z - p_{\mathcal{C}}(x) \rangle \leq 0$$

3. L'application $p_{\mathcal{C}} : E \rightarrow \mathcal{C}$ est 1-lipschitzienne.

Démonstration. **On démontre le premier point :**

Par définition de la borne inférieure $\delta = d(x, \mathcal{C}) = \inf_{y \in \mathcal{C}} \|x - y\|$, il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de points de $\mathcal{C}$ telle que

$$\delta^2 \leq \|x - y_n\|^2 < \delta^2 + \frac{1}{n}.$$

En utilisant l'identité du parallélogramme, on a pour tous les entiers $m > n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|^2 &= \|(y_m - x) + (x - y_n)\|^2 \\ &= 2(\|y_m - x\|^2 + \|x - y_n\|^2) - \|(y_m - x) - (x - y_n)\|^2 \\ &= 2\left(\|y_m - x\|^2 + \|x - y_n\|^2 - 2\left\|x - \frac{y_m + y_n}{2}\right\|^2\right) \end{aligned}$$

où $\frac{y_m + y_n}{2} \in \mathcal{C}$ car $\mathcal{C}$ est convexe ceci implique que

$$\|y_m - y_n\|^2 \leq 2\left(2\delta^2 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 2\delta^2\right) = 2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) < \frac{4}{n}.$$

On en déduit donc que la suite (y_n) est de Cauchy, donc convergente vers un point y de $\mathcal{C}$ puisque E est complet et $\mathcal{C}$ est fermé.

Faisant tendre n vers l'infini dans les encadrements,

$$\delta^2 \leq \|x - y_n\|^2 < \delta^2 + \frac{1}{n},$$

on obtient (par continuité de la norme) que

$$\delta^2 \leq \|x - y\|^2 < \delta^2.$$

On en déduit donc que

$$\|x - y\| = \delta.$$

De plus si il existe un autre vecteur $z \in \mathcal{C}$ tel que $\|x - z\| = \delta$, on a alors en utilisant à nouveau l'identité du parallélogramme :

$$\begin{aligned}\|y - z\|^2 &= 2 \left(\|y - x\|^2 + \|x - z\|^2 - 2 \left\| x - \frac{y + z}{2} \right\|^2 \right) \\ &= 2 \left(2\delta^2 - 2 \left\| x - \frac{y + z}{2} \right\|^2 \right) \\ &\leq 2(2\delta^2 - 2\delta^2) = 0\end{aligned}$$

ce qui implique que $z = y$.

Démontrons le points 2 :

En notant y l'unique vecteur dans $\mathcal{C}$ tel que $\|x - y\| = d(x, \mathcal{C})$, pour tout $z \in \mathcal{C}$ et tout $t \in [0, 1]$ le vecteur $z_t = (1 - t)y + tz$ est dans le convexe $\mathcal{C}$, donc :

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &\leq \|x - z_t\|^2 \\ &\leq \|x - y - t(z - y)\|^2 \\ &\leq \|x - y\|^2 - 2t\Re\langle x - y, z - y \rangle + t^2\|z - y\|^2\end{aligned}$$

Soit

$$t\|z - y\|^2 - 2\Re\langle x - y, z - y \rangle \geq 0$$

pour tout $t \in]0, 1]$, ce qui implique en faisant tendre t vers 0 que

$$\Re\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$$

Réciproquement, si $y' \in \mathcal{C}$ est un vecteur vérifiant cette propriété, on a alors pour tout $z \in \mathcal{C}$:

$$\|x - z\|^2 = \|x - y' + y' - z\|^2 = \|x - y'\|^2 - 2\Re\langle x - y', z - y' \rangle + \|z' - y'\|^2 \geq \|x - y'\|^2$$

donc $\|x - y'\| = d(x, \mathcal{C})$, ce qui implique que $y' = y$.

Démontrons le point 3 :

Soient x_1, x_2 dans E et $y_1 = p_{\mathcal{C}}(x_1)$, $y_2 = p_{\mathcal{C}}(x_2)$.

Des inégalité :

$$\Re\langle x_1 - y_1, y_2 - y_1 \rangle \leq 0 \quad \text{et} \quad \Re\langle x_2 - y_2, y_1 - y_2 \rangle \leq 0$$

on en déduit par addition que

$$\Re\langle (x_1 - x_2) + (y_2 - y_1), y_2 - y_1 \rangle \leq 0.$$

Soit

$$\|y_2 - y_1\|^2 \leq \Re\langle (x_2 - x_1), y_2 - y_1 \rangle \leq |\langle (x_2 - x_1), y_2 - y_1 \rangle| \leq \|y_2 - y_1\| \times \|x_2 - x_1\|$$

(inégalité de Cauchy Schwarz). Donc

$$\|p_{\mathcal{C}}(x_2) - p_{\mathcal{C}}(x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\|$$

ce qui nous dit que $p_{\mathcal{C}}$ est 1-lipschitzienne

□