

Leçon 148 : Dimension d'un espace vectoriel (fini). Rang. Exemples et applications.

Rapport du jury : existence polynômes annulateurs, dual, théorème de riesz, espace des solutions edo, corps finis, caractérisation des endomorphismes dz

I) Théorie de la dimension

1) Familles libres, génératrices et bases [DES]

- Définition famille libre et génératrice $\rightarrow$ base
- Sous-famille d'une famille libre
- Sur-famille d'une famille génératrice

2) Existence de bases et dimension [DES]

- Dim finie = admet une famille génératrice finie
- Théorème de la base extraite
- Théorème de la base incomplète
- Définition de la dimension
- Cardinal d'une famille et côté générateur/libre
- Dimension d'une somme directe (somme directe à définir), d'un sev
- Formule de Grassmann

3) Dimension finie et EVN [GOU]

- Equivalence des normes et corollaires
- Théorème de Riesz
- Réduction des endomorphismes normaux

II) Théorie du rang [DES]

1) Familles de vecteurs et applications linéaires

- Rang d'une famille de vecteurs
- Rang d'une application linéaire
- Théorème du rang et équivalences injectivité et surjectivité
- Rang d'un projecteur

2) Matrices

- Définition rang d'une matrice
- Calcul du rang d'une matrice avec Gauss
- $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \text{rg}(A) = n$
- Equivalence de matrices et lien avec le rang
- Rang = taille maximale d'une matrice extraite carrée inversible

III) Applications

1) Dualité [GOU]

- Définition dual et base duale
- Dimension du dual
- Intersection de noyaux et dimension
- Réduction de Jordan par la dualité

2) Extensions de corps [GOZ]

- Définition
- Degré d'une extension, extension finie
- Théorème de la base télescopique
- Lien entre degré du polynôme minimal et degré de l'extension monogène associée
- Degré d'une extension

3) Calcul différentiel [GOU]

- Définition de la différentielle
- Différentielle du déterminant
- Extrema liés
- Optimisation de la norme euclidienne sur $SL_n(\mathbb{R})$

4) Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$ [ROM]

- Loi d'inertie de Sylvester

Idee : Faire une partie sur le groupe orthogonal et mettre les générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$ en développement