

Développement : Théorème des extrema liés

Référence : Algèbre Linéaire , Joseph Grifone, page 313-314

Leçon : 206 et 215.

Théorème :

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, p un entier compris entre 2 et n , $\varphi = (\varphi_k)_{1 \leq k \leq p} : O \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de O dans $\mathbb{R}^p$ et $K = \{x \in O, \varphi(x) = 0\}$ supposé non vide. Si la restriction de f à K admet un extremum local en $a \in K$ tel que les différentielles $d\varphi_1(a), \dots, d\varphi_p(a)$ soient linéairement indépendantes dans le dual de $\mathbb{R}^n$, les formes linéaires $df(a), d\varphi_1(a), \dots, d\varphi_p(a)$ sont alors liées, ce qui signifie qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ uniquement déterminés tels que

$$df(a) = \sum_{j=1}^p \lambda_j d\varphi_j(a)$$

Démonstration. Pour $1 \leq p \leq n$, on note les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sous la forme

$$x = (y, z) \quad \text{où} \quad y = (x_i)_{1 \leq i \leq n-p} \in \mathbb{R}^{n-p} \quad \text{et} \quad z = (x_i)_{n-p+1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^p.$$

Pour $p = n$, la famille libre $(d\varphi_k(a))_{1 \leq k \leq n}$ est une base du dual de $\mathbb{R}^n$, donc $df(a)$ est une combinaison linéaire des $d\varphi_k(a)$ que l'on ait un extremum en ce point ou pas.

Pour $1 \leq p \leq n-1$, la famille $(d\varphi_k(a))_{1 \leq k \leq p}$ étant libre, la matrice jacobienne

$$J_\varphi(a) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$$

est de rang p dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et quitte à modifier la numérotation, on peut supposer que :

$$\det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ n-p+1 \leq j \leq n}} = \det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq p} \neq 0$$

(Note : Pour $p = 1$, ce déterminant se réduit simplement à la dérivée partielle non nulle $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}(a) \neq 0$).

Le théorème des fonctions implicites nous dit alors, en notant $a = (b, c)$ dans $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$, qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de b dans $\mathbb{R}^{n-p}$ et une fonction $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^p$ caractérisée par la condition :

$$((y, z) \in \mathcal{V} \text{ et } \varphi(y, z) = \varphi(b, c) = 0) \Leftrightarrow (y \in \mathcal{U} \text{ et } z = g(y))$$

Comme la restriction de f à K admet un extremum local en a , la fonction h définie sur $\mathcal{U}$ par $h(y) = f(y, g(y))$ admet un extremum local en b .

Cette fonction étant de classe $\mathcal{C}^1$, on a pour $1 \leq j \leq n-p$

$$\frac{\partial h}{\partial y_j}(b) = 0,$$

soit compte tenu de $g(b) = c$:

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}(a) + \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial z_k}(a) \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(b) = 0 \quad (1 \leq j \leq n-p)$$

Sachant que $\varphi(y, g(y)) = 0$ pour tout $y \in \mathcal{U}$, on a aussi :

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}(a) + \sum_{k=1}^p \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_k}(a) \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(b) = 0 \quad (1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n-p)$$

Ces résultats se traduisent sur la matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial y_{n-p}}(a) & \frac{\partial f}{\partial z_1}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial z_p}(a) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_{n-p}}(a) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}(a) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_p}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_p}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial \varphi_p}{\partial y_{n-p}}(a) & \frac{\partial \varphi_p}{\partial z_1}(a) & \dots & \frac{\partial \varphi_p}{\partial z_p}(a) \end{pmatrix}$$

en disant que les colonnes 1 à $n-p$ sont des combinaisons linéaires des p dernières colonnes, donc le rang de cette matrice est inférieur ou égal à p et comme

$$\det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq p} \neq 0,$$

ce rang est égal à p .

Les $p+1$ lignes de cette matrice sont par conséquent liées, ce qui signifie qu'il existe des réels non tous nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}$ tels que :

$$\alpha_1 df(a) + \sum_{j=1}^p \alpha_{j+1} d\varphi_j(a) = 0$$

Comme la famille $(d\varphi_k(a))_{1 \leq k \leq p}$ est libre, on a nécessairement $\alpha_1 \neq 0$. En divisant par $-\alpha_1$ et en posant $\lambda_j = \frac{\alpha_{j+1}}{-\alpha_1}$, on obtient :

$$df(a) = \sum_{j=1}^p \lambda_j d\varphi_j(a)$$

les coefficients λ_j étant uniquement déterminés. □