

Développement : Théorème de Sylvester

Référence : Algèbre Linéaire , Joseph Grifone, page 313-314

Leçon : 170 et 171.

Théorème :

Soit q une forme quadratique sur E , Il existe alors sur E des bases orthogonales pour q . En d'autres termes, il existe toujours une base $(e_1, \dots, e_n)$ telle que si

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

alors

$$q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2 \quad (\text{avec } a_i \in \mathbb{K}) \quad \text{où } r = \text{rg}(q).$$

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur la dimension n de E .

Initialisation : $n = 1$, il n'y a rien à démontrer.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Supposons le théorème vrai à l'ordre $n - 1$ et soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension n .

- ★ Si $q = 0$, le théorème est trivial : toutes les bases sont orthogonales.
- ★ Sinon $q \neq 0$. Alors il existe $v \in E$ tel que $q(v) \neq 0$ et posons

$$F = \{x \in E \mid \varphi(x, v) = 0\}$$

Il est facile de voir que F est un sous-espace vectoriel de E et que $v \notin F$. En effet, $F = \ker(\omega)$, où ω est la forme linéaire définie par $\omega(x) = \varphi(x, v)$. Comme $\omega(v) = \varphi(v, v) \neq 0$, ω n'est pas la forme nulle et donc

$$\dim(\ker(\omega)) = \dim(F) = n - 1.$$

D'autre part, $v \notin F$, car $\varphi(v, v) \neq 0$.

On en déduit que

$$E = \text{vect}(\{v\}) \oplus F.$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, sur F il existe des bases orthogonales. Si donc $\{v_2, \dots, v_n\}$ est une bases orthogonale de F alors $\{v, v_2, \dots, v_n\}$ est une base orthogonal de E .

□

Théorème :

Il existe une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E tel que

$$\text{Mat}_{(e_i)}(q) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $r = \text{rg}(q)$ et p dépend uniquement de q et non de la base choisie.

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthogonale pour la forme polaire de q . Si

$$x = \sum_{i=1}^n y_i e_i,$$

on a :

$$q(x) = a_1 y_1^2 + \dots + a_r y_r^2 \quad \text{avec pour tout } i \in \{1, \dots, n\}, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Soit $p \in \{1, \dots, r\}$. Supposons que $a_1, \dots, a_p > 0$ et $a_{p+1}, \dots, a_r < 0$. On pourra écrire :

$$q(x) = (\sqrt{a_1} y_1)^2 + \dots + (\sqrt{a_p} y_p)^2 - (\sqrt{-a_{p+1}} y_{p+1})^2 - \dots - (\sqrt{-a_r} y_r)^2$$

Ainsi :

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2$$

avec $x_i = \sqrt{a_i} y_i$ avec $i \in \{1, \dots, p\}$ et $x_j = \sqrt{-a_j} y_j$ avec $j \in \{p+1, \dots, r\}$.

Il reste à montrer que p ne dépend pas du choix de la base. Considérons les bases $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e'_1, \dots, e'_n)$ tel que :

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 \quad \left(x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \right)$$

et

$$q(x) = y_1^2 + \dots + y_{p'}^2 - y_{p'+1}^2 - \dots - y_r^2 \quad \left(x = \sum_{i=1}^n y_i e'_i \right).$$

Posons

$$\begin{aligned} F &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) & F' &= \text{Vect}(e'_1, \dots, e'_{p'}) \\ G &= \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n) & G' &= \text{Vect}(e'_{p'+1}, \dots, e'_n). \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} x \in F &\implies q(x) \geq 0, & x \in F &\implies q(x) \geq 0 \\ x \in G &\implies q(x) \leq 0, & x \in G' &\implies q(x) \leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi pour $x \in F \cap G'$, on a $q(x) = 0$. Or

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 = 0$$

Donc pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $x_i = 0$ et donc $x = 0$

Ainsi, F et G' sont en somme directe. Puisque $F \oplus G' \subset E$, on a :

$$\begin{aligned} \dim(F) + \dim(G') &\leq n \\ p + (n - p') &\leq n \\ p &\leq p' \end{aligned}$$

De la même manière, en prenant, $F' \cap G$ on retrouve que $p' \leq p$.

Finalement, p ne dépend que de q et non du choix de la base. □