

Leçon 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

L'ensemble $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les entiers m et n sont fixés, non nuls. Une matrice est de taille $m \times n$.

1 Systèmes Linéaires

1.1 définition et première propriété

Définition 1. : Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{K}^n$ et $b \in \mathbb{K}^m$. On appelle système linéaire l'équation :

$$Ax = b$$

Définition 2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ une matrice associée à un système linéaire. Soit $(L_i)_{1 \leq i \leq m}$ les lignes de la matrice A . Soit pour $i \in [1, m]$:

$$l_i = \begin{cases} n+1 & \text{si } L_i = 0 \\ \min\{j \in [1, n] | a_{i,j} \neq 0\} & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice (ou le système) est dit échelonnée en ligne si pour tout $i \in [1, m]$

- Si $l_i = n+1$ alors $l_{i+1} = n+1$

- $l_i < l_{i+1}$ sinon.

Proposition 3. Le rang d'une matrice échelonnée et le nombre de ligne non nul.

Exemple 4. La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée de rang égal à 3.

1.2 cas général

Théorème 5 (Rouché-Fontené). Soit,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pr}x_r + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Un système de m équation en n inconnues, de rang r . On extrait du système le mineur δ d'ordre r non nul, quitte à changer la numérotation, on suppose que,

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & \cdots & a_{1r}x_r \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1}x_1 & \cdots & a_{rr}x_r \end{vmatrix}$$

1) Le système admet une solution ssi tous les déterminants caractéristique associés à δ sont nuls :

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & \cdots & a_{1r}x_r & \cdots & a_{1n}x_n & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1}x_1 & \cdots & a_{rr}x_r & \cdots & a_{rn}x_n & b_r \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1}x_1 & \cdots & a_{sr}x_r & \cdots & a_{sn}x_n & b_s \end{vmatrix}$$

2) Si cette condition est réalisée, le système est équivalent au système des équation principales :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Exemple 6. $k, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x + y - z = \alpha \\ y + 3z = \beta \\ 2x + ky + 2z = \gamma \end{cases}$$

1) si $k = 2$ il y a une unique solution

2) si $k \neq 2$

a) $\gamma \neq \alpha + \beta$: pas de solution

b) $\gamma = \alpha + \beta$: une infinité de solutions dépendant d'un paramètre.

2 Résolution par méthode directe

2.1 approche naïve

Définition 7. Un système linéaire est dit homogène si le membre constant de l'équation est nul.

Remarque 8. un système homogène admet au moins le vecteur nul comme solution.

Proposition 9. Soit A une matrice inversible, alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{Com}(A))^T$$

avec $\text{Com}(A)$ la comatrice de A

Proposition 10. (Formule de Cramer) Soit A une matrice inversible des tailles n par n dont les colonnes sont notées $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$. Soit x et b des éléments de $\mathbb{K}^n$ tel que $Ax = b$, alors pour tout entier i entre 1 et n :

$$x_i = \frac{\det(C_1, \dots, C_{i-1}, b, C_{i+1}, \dots, C_n)}{\det(A)}$$

Remarque 11. L'ordre de complexité des formules de Cramer est $O(n!)$

Proposition 12. (Méthode de remontée) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de taille n par n triangulaire supériorité. Soit x et b des éléments de $\mathbb{K}^n$ tel que $Ax = b$. Soit $i \in [1, n]$.

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j \right)$$

Proposition 13. L'ordre de complexité de la remontée est $O(n^2)$

Exemple 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Le système linéaire $Ax = b$ a pour solution $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2.2 Pivot de Gauss

Définition 15. Une opération élémentaire sur une matrice A est une opération sur les lignes parmi :

-La **dilatation** $L_i \leftarrow \lambda L_i$ Les coefficients de la i-ème ligne sont multipliés par un scalaire λ .

-La **Permutation** $L_i \longleftrightarrow L_j$ La i-ème ligne et la j-ème ligne sont permutées.

-La **Transvection** $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$: Les coefficients de la i-ème ligne sont additionnés de ceux de la j-ème ligne, multipliés par un scalaire λ .

Remarque 16. On peut aussi faire ces opérations sur les colonnes.

Proposition 17. Les opérations élémentaires peuvent aussi se représenter par des multiplications de matrice à droite pour les lignes et à gauche pour les colonnes.

-La **dilatation** $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$

-La **Permutation** $P_{i,j} = I_n - (E_{i,i} + E_{j,j}) + (E_{i,j} + E_{j,i})$

-La **Transvection** $T_{i,j} = I_n + \lambda E_{i,j}$

Proposition 18. SL_n est engendré par les matrices de transvection, et GL_n est engendré par les matrices de transvection et de dilatation.

Algorithme 19. (Pivot de Gauss) Soit A une matrice. On définit $(A^{(k)})_{1 \leq k \leq n}$ de terme initiale $A^{(1)} = A$ de manière récursive au rang (k+1) :

-Si tous les coefficients, sauf éventuellement le premier, de la première colonne sont nuls, l'algorithme est appliqué à la matrice extraite obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne.

-Sinon, par échange de lignes, le premier coefficient est rendu non nul, puis on retranche un multiple de la première ligne à chacune des autres lignes de sorte à annuler les autres coefficients de la première colonne.

Proposition 20. La matrice $A^{(n)}$ obtenue par le pivot de Gauss est échelonnée par ligne

Proposition 21. On a que $\text{rg}(A^{(n)}) = \text{rg}(A)$ et $\det(A^{(n)}) = \det(A)$

Remarque 22. Le pivot de Gauss permet de trouver de manière plus simple de trouver la trace et le déterminant d'une matrice.

Corollaire 23. pour toute matrice A, il existe une matrice inversible M tel que MA est échelonnée.

Exemple 24. Soit $A = A^{(1)} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. La méthode du pivot de Gauss donne en deux étapes :

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & \frac{18}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

Proposition 25. L'ordre de complexité du pivot de Gauss est $O(n^3)$

2.3 rôle du pivot

Remarque 26. En pratique, pour tout étape k, on prend le pivot $|a_k^{(k)}|$ maximal pour éviter les erreurs numériques.

Exemple 27. Soit $A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ alors la solution est $x = \begin{pmatrix} 1.0001 \\ 0.9999 \end{pmatrix}$. Or si le pivot n'est pas bien choisi on obtient un arrondi après pivot de gauss, $\begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ -9990 \end{pmatrix}$ et donc ici $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Développement 1

Théorème 28. Factorisation LU. Soit A une matrice telle que ses n sous-matrices diagonales $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ soient inversibles. Il existe un unique couple (L, U) de matrices respectivement triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et triangulaire supérieure tel que :

$$A = LU.$$

Théorème 29. Factorisation de Cholesky. Soit A une matrice symétrique définie positive. Il existe une matrice triangulaire inférieure avec des coefficients positifs sur la diagonale B telle que :

$$A = BB^T.$$

Exemple 30. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{4} \end{pmatrix}$

2.4 Autres décompositions

Théorème 31 (Décomposition QR). Soit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ avec $m \geq n$. Alors il existe une matrice unitaire (ou orthogonale si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) $Q \in \mathbb{K}^{m \times m}$ et une matrice triangulaire supérieure $R \in \mathbb{K}^{m \times n}$ telles que

$$A = QR.$$

Théorème 32. Décomposition en valeurs singulières (SVD) Pour toute matrice $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, il existe deux matrices unitaires (ou orthogonales si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

$$U \in \mathbb{K}^{m \times m} \quad \text{et} \quad V \in \mathbb{K}^{n \times n},$$

ainsi qu'une matrice diagonale

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0,$$

telles que

$$A = U \Sigma V^*.$$

Les réels σ_i sont appelés les valeurs singulières de A . Les colonnes de U et V associées aux valeurs singulières non nulles forment les vecteurs singuliers à gauche et à droite, respectivement.

3 Méthode Itérative

3.1 Analyse Matriciel

Définition 33. On appelle le rayon spectral d'une matrice le maximum de ces valeurs propres en module. On le note $\rho(A)$

Théorème 34. Soit A une matrice et une norme $\|\cdot\|$ de $M_n(\mathbb{R})$ alors,

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

Théorème 35. Soit A une matrice et une norme $\|\cdot\|$ matricielle de $M_n(\mathbb{R})$ alors il y a équivalence entre les assertions suivante,

1. $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$
2. $\rho(A) < 1$
3. Il existe une norme subordonnée $\|\cdot\|$ tel que $\|A\| < 1$

3.2 Méthode de Jacobi, Gauss-Seidel, Relaxation

Dans cette partie, A est une matrice inversible, x et b des vecteur tel que $Ax=b$. Le but est de trouver le vecteur x qui vérifie l'équation avec A et c fixer.

Définition 36. Une matrice de méthode itérative est une matrice B tel qu'il existe un vecteur c telle que

$$x = Bx + c$$

Algorithme 37. Soit B une matrice de méthode itérative avec c son vecteur associée. Soit $x_0 \in \mathbb{K}^n$. La méthode itérative est la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier k par,

$$x_{k+1} = Bx_k + c$$

Théorème 38. Une méthode itérative converge, si et seulement si, le rayon spectral de la matrice associée à la méthode est strictement inférieur à 1

Remarque 39. La convergence ne dépend pas du vecteur initial

Proposition 40. Soit M une matrice inversible et $N=M-A$. Alors la matrice $M^{-1}N$ est une matrice de méthode itérative qui est associée au vecteur $M^{-1}b$

Définition 41. (Méthode de Jacobi) Si A a tous ses coefficients diagonaux non nuls. Soit $D = \text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$. Soit E l'opposé de la partie triangulaire inférieure stricte de A . Soit F l'opposé de la partie triangulaire supérieure stricte de A . De telle sorte que $A=D-E-F$.

Soit $J = D^{-1}(E+F)$. La matrice J est une matrice de méthode itérative associée au vecteur $D^{-1}b$

Définition 42. (Méthode de Gauss-Seidel) Soit $G = (D - E)^{-1}F$. La matrice G est une matrice de méthode itérative associée au vecteur $(D - E)^{-1}b$

Définition 43. (Méthode de Relaxation) Soit ω un réel non nul et $L_\omega = (\frac{1}{\omega}D - E)^{-1}(\frac{1-\omega}{\omega}D + F)$. La matrice L_ω est une matrice de méthode itérative associée au vecteur b

Développement 2

Lemme 44. Soit A une matrice hermitienne définie positive. Soit M une matrice inversible et $N = M - A$. Si $M^* + N$ est (hermitienne) définie positive, alors

$$\rho(M^{-1}N) < 1.$$

Théorème 45. Ostrowski-Reich

Soit A hermitienne définie positive à coefficients diagonaux non nuls. La méthode de relaxation converge si $0 < \omega < 2$.

Proposition 46. Soit ω non nul.

$$\rho(L_\omega) \geq |\omega - 1|. \quad (30)$$