

Développement : $O(E)$ est engendré par les réflexions

Référence : Oraux X-ENS Algèbre volume 3 page 62

Leçon : 108, 148, 158 et 161.

Théorème :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace euclidien de dimension finie n . On a toute transformation orthogonale $f \in O(E)$ est engendré par au plus $\text{rg}(f - Id) = p$ réflexions.

Démonstration. On procède par récurrence forte finie sur $p \in [0, n]$

Initialisation : pour $p = 0$, on a $f = Id$ donc il n'y a rien à vérifier.

Hérédité : On suppose que la propriété soit vraie pour tout $q \leq p \in [0, n-1]$. Soit $f \in O(E)$ telle que $\text{rg}(f - Id) = p + 1$. On a

$$\ker(f - Id) \neq E.$$

En effet, on aurait sinon $\text{rg}(f - Id) = 0$ par le théorème du rang, or $\text{rg}(f - Id) = p + 1 \geq 1 > 0$.

Ainsi, il existe $x_0 \in E \setminus \ker(f - Id)$. Posons

$$e := \frac{x_0}{\|x_0\|}$$

On a

$$f(e) \neq e \quad \text{et} \quad \|f(e)\| = \|e\| = 1$$

Posons $H = \text{vect}(f(e) - e)^\perp$ et r la symétrie orthogonale par rapport à H .

Montrons que $\ker(f - Id) \subsetneq \ker(r \circ f - Id)$. En effet, $e \notin \ker(f - Id)$ mais

$$\langle f(e) + e, f(e) - e \rangle = \|f(e)\|^2 - \|e\|^2 = 0$$

donc, $f(e) + e \in H$. Ainsi

$$r(f(e) + e) = f(e) + e \quad \text{et} \quad r(f(e) - e) = -f(e) + e$$

Donc

$$2r(f(e)) = 2e$$

Donc

$$r \circ f(e) = e$$

c'est-à-dire que $e \in \ker(r \circ f - Id)$

Maintenant soit $x \in \ker(f - Id)$, $f(x) = x$. De plus

$$\langle x, f(e) - e \rangle = \langle x, f(e) \rangle - \langle x, e \rangle = 0$$

Donc $x \in H$. Ainsi

$$r(f(x)) = r(x) = x$$

donc

$$x \in \ker(r \circ f - Id)$$

Par le théorème du range, on en déduit que

$$\operatorname{rg}(r \circ f - Id) < \operatorname{rg}(f - Id) = p + 1$$

Ainsi par hypothèse de récurrence il existe $r_1, \dots, r_q$ réflexions par rapport à $H_1, \dots, H_q$ hyperplan de E , $q \leq p$ tels que

$$r \circ f = r_1 \circ \dots \circ r_q$$

Donc

$$f = f \circ r_1 \circ \dots \circ r_q$$

□

Corollaire :

En faite f se décompose en exactement $\operatorname{rg}(f - Id)$ réflexions.

Démonstration. Si

$$f = \prod_{i=1}^q r_i$$

avec pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$, r_i réflexion par rapport à un hyperplan H_i de E . Donc en particulier

$$\bigcap_{i=1}^q H_i \subset \ker(f - Id)$$

De plus par un lemme

$$n - q \leq \dim \left(\bigcap_{i=1}^q H_i \right)$$

Ainsi

$$n - q \leq \dim(\ker(f - Id)).$$

Par le théorème du rang

$$\operatorname{rg}(f - Id) \leq q.$$

□