

Développement : Différentiabilité de l'exponentielle de matrice

Référence : Algèbre et Géométrie, Rombaldi, pages 762-763

Leçon : 155 et 215.

Théorème :

L'exponentielle matricielle est de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$d(\exp)(M)(H) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!} \left(\sum_{i=0}^{p-1} M^i H M^{p-1-i} \right)$$

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $\varphi_k : X \mapsto X^k$, qui est de classe C^∞ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ses composantes étant polynomiales).

On vérifie facilement par récurrence que :

$$\begin{aligned} \varphi_k(X + H) &= (X + H)^k \\ &= X^k + X^{k-1}H + X^{k-2}HX + \dots + HX^{k-1} + o(\|H\|) \\ &= X^k + \sum_{i=0}^{k-1} X^i H X^{k-1-i} + \|H\| \varepsilon(H) \end{aligned}$$

avec $\lim_{H \rightarrow 0} \varepsilon(H) = 0$.

En effet, pour $k = 1$ c'est vrai. En supposant le résultat acquis pour $k \geq 1$, on a :

$$(X + H)^{k+1} = \left(X^k + \sum_{i=0}^{k-1} X^i H X^{k-1-i} + \|H\| \varepsilon(H) \right) (X + H)$$

En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} (X + H)^{k+1} &= X^{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} X^i H X^{k-i} + X^k H + \sum_{i=0}^{k-1} X^i H X^{k-1-i} H + \|H\| \varepsilon(H) (X + H) \\ &= X^{k+1} + \sum_{i=0}^k X^i H X^{k-i} + \|H\| \varepsilon_1(H) \end{aligned}$$

où le reste $\varepsilon_1(H)$ vérifie :

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_1(H)\| &= \left\| \frac{1}{\|H\|} \sum_{i=0}^{k-1} X^i H X^{k-1-i} H + \varepsilon(H) (X + H) \right\| \\ &\leq k \|X\|^{k-1} \|H\| + \|\varepsilon(H)\| (\|X\| + \|H\|) \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la différentielle de φ_k en X est définie pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$d\varphi_k(X)(H) = \sum_{i=0}^{k-1} X^i H X^{k-1-i}$$

(pour $k = 0$, on pose $d\varphi_0(X) = 0$).

De plus, en utilisant l'inégalité triangulaire et la sous-multiplicativité de la norme, on a :

$$\|d\varphi_k(X)(H)\| \leq k\|X\|^{k-1}\|H\|$$

On en déduit l'inégalité sur la norme d'opérateur :

$$\frac{1}{k!}\|d\varphi_k(X)\| \leq \frac{\|X\|^{k-1}}{(k-1)!}$$

Ainsi, la série $\sum \frac{1}{k!}\|d\varphi_k(X)\|$ est normalement (et donc uniformément) convergente sur tout compact de l'espace de Banach $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Il en résulte que $\exp$ est de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec :

$$\begin{aligned} d(\exp)(X)(H) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} d\varphi_k(X)(H) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} X^i H X^{k-1-i} \end{aligned}$$

□